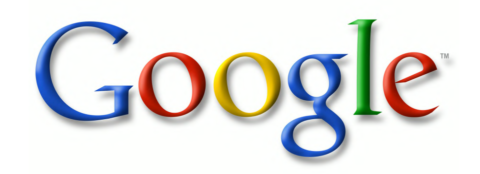
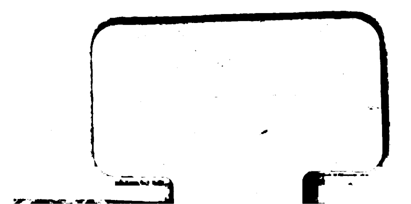






ÜBER
ULTRA-BERNOULLISCHE UND ULTRA-EULERSCHE ZAHLEN UND FUNKTIONEN
UND DEREN ANWENDUNG
AUF DIE SUMMATION VON UNENDLICHEN REIHEN

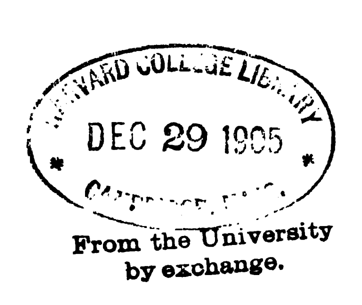
DISSERTATION

ZUR BEWERBUNG UM DIE DOKTORWÜRDE
DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT JENA

VORGELEGT VON

FRITZ WICKE
AUS DRESDEN

DRESDEN
DRUCK VON B. G. TEUBNER
1905



Genehmigt von der philosophischen Fakultät der Universität Jena auf Antrag des Herrn Professor Dr. Gutzmer.

Jena, den 28. April 1905.

Geheimer Hofrat Professor Dr. **Thomae,**
dz. Dekan.

MEINEM VEREHRTEN LEHRER

HERRN GEHEIMEN HOFRAT DR. PHIL. M. KRAUSE

PROFESSOR FÜR MATHEMATIK

AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DRESDEN

IN TIEFSTER DANKBARKEIT

GEWIDMET

In besonders liebenswürdiger Weise haben mich bei Abfassung vorliegender Abhandlung die Herren Geh. Hofrat Prof. M. Krause, Dresden, und Prof. A. Gutzmer, Jena, unterstützt, denen ich dafür meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

Die Theorie der Euler-Maclaurinschen Summenformel

$$h\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{q-1}\,h)+f(a+qh)\}$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx+\frac{h}{2}\big(f(a)+f(b)\big)+\sum_1^{n-1}{}_k(-1)^{k-1}B_{2k-1}\frac{h^{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\big)$$

$$+P_{2n};\qquad\qquad b=a+qh$$

ist von mehreren Mathematikern auf verschiedenen Wegen gewonnen worden. Unter anderen leitet sie Schlömilch[1]) aus der Taylorschen Reihe ab, in der er dem Restgliede die Form eines bestimmten Integrales gibt; Wirtinger[2]) und Franel[3]) erhalten sie aus einer identischen Transformation. Kronecker[4]) schließlich zeigt, daß sie nur ein Spezialfall einer viel allgemeineren Summenformel ist, desgl. Lindelöf.[5])

Besondere Untersuchungen erfordert dabei stets das Restglied P_{2n}, für das vorzüglich zwei Darstellungen von Wichtigkeit sind, welche sich ergeben, je nachdem man der unter dem Integrale auftretenden Bernoullischen Funktion die Form einer in der Variablen ganzen rationalen Funktion gibt, die sog. Jacobische Restdarstellung[6])

$$P_{2n}=-\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi(t,2n)\sum_{r=0}^{q-1}f^{(2n)}(a+rh+ht)\,dt,$$

oder ob man sie durch die entsprechende Cosinusreihe ausdrückt, die Poissonsche Restform[7])

$$P_{2n}=(-1)^n h^{2n+1}\int_a^b f^{(2n)}(t)\sum\frac{2\cos 2r\pi t}{(2r\pi)^{2n}}\,dt,$$

ein etwas eleganterer Ausdruck. Eine dritte Gestalt nimmt das Restglied in der zitierten Lindelöfschen Abhandlung an.

Schwieriger ist es, den Rest so umzuformen, daß man die Größe desselben abschätzen kann. Für besondere Gattungen von Funktionen $f(x)$ geben Schlömilch[1]) und Saalschütz[8]) Formeln an, die vom Integralzeichen frei sind; ihnen schließen sich noch Arbeiten Malmstens[9]) und Sonins[10]) über den erwähnten Punkt an. In einer Abhandlung unternimmt es ferner Stieltjes[11]), bei der Bestimmung des Restwertes sich der Glieder der Reihe selbst zu bedienen und aus ihnen heraus den Wert des Fehlers mit einer erstaunlich großen Genauigkeit zu ermitteln; er führt die Betrachtungen für zwei Gruppen von Reihen gesondert durch: für diejenigen, deren Glieder gleiche, und die, deren Glieder wechselnde Vorzeichen haben. Schließlich sei die nicht minder ausgezeichnete Methode Kroneckers[4]) erwähnt, die darin besteht, den Integranden der Restform seiner allgemeinen Summenformel $\int_0^r f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx$ so in Teilintervalle zu zerlegen, daß in den

einzelnen Intervallen $f^{(n)}(x)$ $\big($oder auch $g(-x)\big)$ sein Zeichen nicht mehr ändert, und dann mit Hilfe des Mittelwertsatzes weiter zu schließen. Ebenso versteht es Bourguet[12]), auf den Stieltjes in der obenerwähnten Arbeit zurückgreift, besonders für die Stirlingsche Formel den Restausdruck mit großer Genauigkeit anzugeben.

Die praktische Verwertung der Euler-Maclaurinschen Summenformel tritt besonders auf zwei Gebieten zutage. Wirtinger[3]), und er scheint bisher der einzige zu sein, transformiert mit ihrer Hilfe Reihen, um ihre Werte auf und außerhalb des ursprünglichen Konvergenzkreises zu ermitteln. Er führt dies an einigen Beispielen, der Zetafunktion und der Stirlingschen Formel durch. Wenn er auch das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit nicht durchgeführt hat, so zeigt er doch, daß man es für die gesamte Gruppe derjenigen Reihen durcharbeiten kann, in denen man den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Koeffizienten nach ganzen negativen Potenzen des Index entwickeln kann. Weit größere Anwendung hat die Formel bei der numerischen Auswertung von Reihen gefunden. Schwach konvergente Reihen werden mit ihrer Hilfe zwar oft in divergente verwandelt, aber in solche, die bis zu einem gewissen Gliede stark konvergieren (sog. semikonvergente Reihen). Es gelingt nun oft, Reihen für solche Argumente der Variabeln, für die sie ursprünglich nur ganz langsam konvergieren, zu deren Berechnung also eine große Anzahl von Gliedern nötig wäre, so zu transformieren, daß sie nun mit Hilfe weniger Glieder bis auf einen hohen Grad der Genauigkeit ausgewertet werden können. Ein ausgezeichnetes Beispiel hierfür bietet die Schlömilchsche Transformation der Lambertschen Reihe.

Die Lambertsche Reihe hat wegen ihrer großen praktischen Verwendung die Mathematiker vielfach angeregt, sie zu ihrer numerischen Berechnung praktisch umzugestalten. Lambert[13]) selbst gibt der nach ihm benannten Reihe $\sum \frac{q^k}{1-q^k} = L(q)$ noch eine neue Gestalt:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_k\, \varphi(k)\cdot q^k = L(q),$$

in der $\varphi(k)$ die Anzahl der Teiler von k (so daß $\varphi(p) = 2$, wenn p Primzahl ist) angibt; und diese Transformation hat Curtze[14]) benutzt zur Untersuchung, ob eine Zahl n eine Primzahl ist; es ist dies der Fall, wenn n die Gleichung erfüllt

$$n! - \int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx \cdot \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{p\sin(x\lg p)}{1-2p\cos(x\lg p)+p^2}\right) = 2;$$

ferner findet er, daß, wenn N die Anzahl der Teiler von n ist, das Integral den Wert hat

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{p\sin(x\lg p)}{1-2p\cos(x\lg p)+p^2}\right)dx = n! - N.$$

Weiter haben Clausen[15]) und Cesaro[16]) die Lambertsche Reihe transformiert, von denen die Clausensche Reihe

$$L(q)=\sum_{1}^{\infty}{}_{k}\frac{1+q^{k}}{1-q^{k}}\,q^{k^2}$$

den Vorteil überaus starker Konvergenz besitzt, während die abwechselnden Zeichen der Glieder in der Cesaroschen Transformation

$$L(q)=\sum_{1}^{\infty}{}_{k}\frac{u_1\cdot u_2\cdots u_k}{1-q^{k}}\cdot(-1)^{k-1}\qquad u_k=\frac{q^{k}}{1-q^{k}},$$

die nur unbedeutend schwächer konvergiert, den Fehler leicht abschätzen lassen, den man begeht, wenn man an irgendeiner Stelle abbricht.

Von neueren Arbeiten seien die von Gutzmer und Lerch erwähnt. Beide weisen die Identität der Reihen

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{y^{n}}{1-xz^{n}}=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{1-xyz^{2n}}{(1-xz^{n})(1-yz^{n})}\,x_n y^{n} z^{n^2}$$

nach, und zwar Gutzmer[17]) mit Hilfe einer von Heine aufgestellten Transformationsformel, und Lerch[18]) durch Zerlegung in die doppelt unendliche Reihe

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{y^{n}}{1-xz^{n}}=\sum_{0}^{\infty}{}_{\alpha}\sum_{0}^{\infty}{}_{\beta}\,x^{\beta}y^{\alpha}z^{\alpha\beta}.$$

Man kann nun eine doppelte Spezialisierung vornehmen: Setzt man nämlich erstens $x=y=z=q$ und multipliziert beide Seiten mit q, so ergibt sich

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{q^{n}}{1-q^{n}}=\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{1+q^{n}}{1-q^{n}}\,q^{n^2},$$

also die Clausensche Reihe; setzt man dagegen $x=1$, $y=z=q$, so erhält man nach einigen Rechnungen

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{q^{n}}{1-q^{n}}=\frac{q}{1-q}+\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{1-q^{2n-1}}{(1-q^{n})(1-q^{n-1})}\,q^{n(n-1)},\,{}^{*}$$

eine Transformation der Lambertschen Reihe, die nur unwesentlich schwächer konvergiert als die Clausensche. Sodann leitet Lerch[19]) folgende Beziehung ab:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{q^{\nu}x}{1-q^{\nu}x}=(1-q)^{s}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{x^{n}}{(1-q^{n})(1-q^{n-1})^{s}}$$
$$+(1-q)^{s}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\binom{n+s-1}{n}q^{n}\sum_{0}^{n-1}{}_{x}\frac{q^{x}x}{1-q^{x}x},$$

aus der man ebenfalls leicht neue Ausdrücke für die Lambertsche Reihe finden kann.

---

* Herr Prof. Gutzmer teilt mir mit, daß er diese Transformation der Lambertschen Reihe schon kenne, sie aber nicht publiziert habe.

Auch die Theorie der elliptischen Funktionen und der Thetafunktionen ist zur Summation dieser Reihe verwendet worden. So zeigt Schlömilch[20]), daß die Reihe $\sum_1^\infty {}_n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}$ gleich dem Integral ist

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} = \frac{\varkappa^2 K^2}{2\pi^3} \int_0^\pi \lg(1 - 2q\cos x + q^2) \sin^2 \operatorname{am} \frac{Kx}{\pi}\, dx;$$

setzt man $\sqrt{q'} = q$, so erhält man obige Reihe. Hansen[21]) gibt folgende Integraldarstellung:

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{q^n}{1-q^n} = \tfrac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta_3'(\nu, q)}{\vartheta_3(\nu, q)} \operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\vartheta'\left(\nu, q^{\frac{1}{2}}\right)}{\vartheta\left(\nu, q^{\frac{1}{2}}\right)} \operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu.$$

Auch hier ist eine Arbeit Lerchs[22]) bemerkenswert, die zu dem Ergebnis führt

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{-nt\pi}{1-e^{-nt\pi}} = \frac{-1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\vartheta_0'(z)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{t\pi + 2si\pi} - 1\right)},$$

wobei die Thetafunktion den Parameter ti hat; setzt man links $\lg q = -t\pi$, so erhält man eine neue Darstellungsweise der Lambertschen Reihe.

Schließlich gibt Schlömilch[23]), wie schon erwähnt, mit Hilfe der Eulerschen Summenformel eine Reihe, die sich besonders für Werte q eignet, die nahe an 1 liegen:

$$L(q) = \frac{C - ll\left(\frac{1}{q}\right)}{l\left(\frac{1}{q}\right)} + \tfrac{1}{4} - \sum_1^n {}_k \frac{B_k}{2k! \cdot 2k}\left[l\left(\frac{1}{q}\right)\right]^{2k-1},$$

wobei der mit dem Abbrechen beim n^{ten} Gliede begangene Fehler zwischen den Grenzen liegt

$$-\frac{B_n \cdot B_{n+1}\left(\lg\frac{1}{q}\right)^{2n}}{2n!}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\left[\lg\left(\frac{1}{q}\right)\right]^2}{4\pi^2}\right) < R_{2n}$$

$$< \frac{B_n B_{n+1}\left[\lg\left(\frac{1}{q}\right)\right]^{2n}}{2n!}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\left[\lg\left(\frac{1}{q}\right)\right]^2}{4\pi^2}\right).$$

Fängt man nun nicht, wie es bisher geschehen ist, gleich mit dem ersten Gliede der Lambertschen Reihe an, sondern summiert erst die n ersten Glieder gesondert und wendet auf die übrig bleibende Reihe $\sum_{n+1}^\infty {}_x \frac{q^x}{1-q^x}$ die Eulersche Formel an, so stößt man auf eine bemerkenswerte neue Art von Zahlen, die mit dem Namen Ultra-Bernoullische Zahlen (U.-B. Z.) bezeichnet worden sind.

Die Theorie der Ultra-Bernoullischen und Ultra-Eulerschen Zahlen (U.-E. Z.) ist von verschiedenen Ausgangspunkten aus behandelt worden. In einer eleganten Arbeit geht Cesaro[24]) von den Definitions-

gleichungen $(b+1)^n - a b_n = n$ für die U.-B. Z. und $(\varepsilon+1)^n + a(\varepsilon-1)^n = 0$ für die U.-E. Z. aus, um aus ihnen auf kurzem Wege deren Eigenschaften und deren Verwendung bei Summation einzelner Reihen darzutun. Krause[25]) definiert sie einerseits als die sukzessiven Differentialquotienten der Cotangensfunktion

$$(2i)^{\mu+1} c b_\mu = \frac{d^\mu \cot u}{du^\mu},$$

anderseits als die der Cosecansfunktion

$$2 i^{\mu+1} c_1 a_\mu = \frac{d^\mu \operatorname{cosec} u}{du^\mu},$$

zeigt ferner, daß sie für

$$u = u_r = \frac{r}{n}\pi \qquad (r \text{ und } n \text{ ganze Z. } n > r > 0)$$

in Potenzsummen darstellbar sind

$$c b_{2\mu}(u_r) = \tfrac{1}{2} c' b'_{2\mu} = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{2\mu+1} \frac{(2\mu)!}{(2i)^{2\mu+1}} \cdot \sigma_{2\mu+1}^{(\mu_r)},$$

$$\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

$$c b_{2\mu-1}(u_r) = \tfrac{1}{2} c'' b''_{2\mu-1} = -\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2\mu} \frac{(2\mu-1)!}{(2i)^{2\mu}} \cdot \Sigma_{2\mu}^{(u_r)},$$

$$\Sigma_{2\mu}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}}\right),$$

$$2 c_1 a_{2\mu}(u_r) = c'_1 a'_{2\mu} = \left(\frac{n}{i\pi}\right)^{2\mu+1} \cdot (2\mu)! \cdot s_{2\mu+1}^{(u_r)},$$

$$s_{2\mu+1}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

$$2 c_1 a_{2\mu-1}(u_r) = (2\mu-1) c''_1 a''_{2\mu} = -\left(\frac{n}{i\pi}\right)^{2\mu} \cdot (2\mu-1)! \cdot S_{2\mu}^{(\mu_r)},$$

$$S_{2\mu}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}}\right),$$

und setzt sie in Beziehung zu den gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen; weiter leitet er Ultra-Bernoullische Funktionen (U.-B. F.) aus der symbolischen Definitionsgleichung

$$B_\mu(z, u) = c \cdot (b + z)^\mu,$$

$$B'_\mu(z, u) = B_\mu(z, u) - B_\mu(z, -u), \quad B''_\mu(z, u) = B_\mu(z, u) + B_\mu(z, -u),$$

$$A_\mu(z, u) = c_1 \cdot (a + 2z)^\mu,$$

$$A'_\mu(z, u) = A_\mu(z, u) - A_\mu(z, -u), \quad A''_\mu(z, u) = A_\mu(z, u) + A_\mu(z, -u)$$

ab, für die er hinwiederum Darstellungen durch Fouriersche Reihen gibt.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun ein verschiedener: zuerst sollen gewisse trigonometrische Reihen, die mit den U.-B. F. eng verwandt sind, geometrisch untersucht, und aus ihnen eine Theorie der Ultra-Eulerschen Funktionen abgeleitet werden. Sodann soll die Theorie der Ultra-Bernoullischen Zahlen und Funktionen und ebenso die der Ultra-Eulerschen Zahlen und

Funktionen zur Summation von unendlichen Reihen verwendet werden, und zwar auf zweierlei Weise:

Erstens treten nämlich bei Anwendung der Eulerschen Summenformel die obengenannten Zahlen auf, wenn man gewisse Reihen nach Absonderung einer bestimmten Anzahl von Gliedern summiert; dafür sollen drei Beispiele gebracht werden, die Reihen

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^3}{1+q^6} + \cdots,$$

$$\frac{k'K}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{2q}{1+q^2} + \frac{2q^3}{1+q^6} - \frac{2q^5}{1+q^{10}} + \cdots,$$

und die Lambertsche Reihe:

$$L(q) = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \cdots,$$

und es wird sich zeigen, daß besonders die letzte Reihe eine Form erhält, die an Stärke der Konvergenz der von Schlömilch aufgestellten durchaus nicht nachsteht, nur daß man sich der Mühe unterziehen muß, eine Anzahl Glieder besonders zu berechnen.

Anderseits hat Krause[26]) mit Hilfe der U.-B. Z. eine allgemeinere Summenformel aufgestellt, die trigonometrische Reihen von der Form

$$f(x) + f(x+h)\cos 2u + f(x+2h)\cos 4u + \cdots,$$

$$f(x+h)\sin 2u + f(x+2h)\sin 4u + f(x+3h)\sin 6u + \cdots$$

zu summieren gestattet. Analog läßt sich mit den U.-E. Z. eine Formel für die Reihen

$$f(x) - f(x+h)\cos 2u + f(x+2h)\cos 4u - \cdots,$$

$$-f(x+h)\sin 2u + f(x+2h)\sin 4u - f(x+3h)\sin 6u + \cdots$$

finden. Dann ist man aber auch imstande, Reihen

$$f(x+h)\cos u \pm f(x+3h)\cos 3u + f(x+5h)\cos 5u \pm \cdots;$$

$$f(x+h)\sin u \pm f(x+3h)\sin 3u + f(x+5h)\sin 5u \pm \cdots$$

zu summieren, wie gezeigt werden soll. Als Beispiele sind gewählt:

$$\frac{\cos 2u}{1^s} + \frac{\cos 4u}{2^s} + \frac{\cos 6u}{3^s} + \cdots,$$

$$\operatorname{am}\frac{2Ku}{\pi} = u + \frac{2q}{1+q^2}\sin 2u + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin 4u + \frac{2q^3}{1+q^6}\sin 6u + \cdots,$$

$$\frac{K}{2\pi\,\operatorname{sincoam}\frac{2Ku}{\pi}} = \frac{1}{4\cos u} + \frac{q\cos u}{1-q} - \frac{q^3\cos 3u}{1-q^3} + \frac{q^5\cos 5u}{1-q^5} - \cdots$$

Hingewiesen sei schließlich noch darauf, daß es möglich ist, mit Hilfe dieser Summenformeln Potenzreihen auf und außerhalb des Konvergenzbezirkes zu berechnen; doch soll an dieser Stelle darauf nicht näher eingegangen werden.

Daß die Theorie der U.-B. F. sich von Bedeutung zeigt, sobald es gilt, willkürliche stetige Funktionen analytisch darzustellen, hat in allerjüngster Zeit Krause[27]) ebenfalls nachgewiesen, nachdem schon vorher Lerch[28]) das Problem in etwas allgemeinerer Fassung in Angriff genommen hatte.

Erstes Kapitel.

Theorie der Ultra-Eulerschen Zahlen und Funktionen.

§ 1.

Untersuchung einiger merkwürdigen Fourierschen Reihen.*

A I. Gegeben ist eine gerade Zahl n; das Intervall $0 - \pi$ soll in die Teilintervalle zerlegt werden

$$0 - \frac{2}{n}\pi,\quad \frac{2}{n}\pi - \frac{4}{n}\pi,\quad \frac{4}{n}\pi - \frac{6}{n}\pi,\quad \cdots,\quad \frac{n-4}{n}\pi, - \frac{n-2}{n}\pi,\quad \frac{n-2}{n}\pi - \pi;$$

ferner soll eine Funktion $f(x)$ so bestimmt werden, daß sie in diesen Intervallen konstante Werte besitzt, und zwar der Reihe nach

$$f(y) = \frac{2}{n}\pi f_2,\quad \frac{2}{n}\pi f_4,\quad \frac{2}{n}\pi f_6,\quad \cdots,\quad \frac{2}{n}\pi f_{n-2},\quad \frac{2}{n}\pi f_n;$$

a) Diese Funktion ist in eine Cosinusreihe zu entwickeln

$$f(y) = \tfrac{1}{2}\beta_0 + \beta_1 \cos y + \beta_2 \cos 2y + \cdots$$

Es ist

$$\beta_s = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(y)\cos sy\, dy$$

$$= \frac{4}{n}\left(f_2\int\limits_0^{\frac{2}{n}\pi}\cos sy\,dy + f_4\int\limits_{\frac{2}{n}\pi}^{\frac{4}{n}\pi}\cos sy\,dy + \cdots + f_{n-2}\int\limits_{\frac{n-4}{n}\pi}^{\frac{n-2}{n}\pi}\cos sy\,dy + f_n\int\limits_{\frac{n-2}{n}\pi}^{\pi}\cos sy\,dy\right),$$

$$\beta_s = \frac{4}{ns}\left((f_2 - f_4)\sin\frac{2s}{n}\pi + (f_4 - f_6)\sin\frac{4s}{n}\pi + \cdots + (f_{n-2} - f_n)\sin s\frac{n-2}{n}\pi\right),$$

$$\beta_0 = \frac{4}{n}\left(\frac{2}{n}\pi(f_2 - f_4) + \frac{4}{n}\pi(f_4 - f_6) + \cdots + (f_{n-2} - f_n)\frac{n-2}{n}\pi + f_n\pi\right)$$

$$= \frac{8}{n^2}\pi\left((f_2 - f_4) + 2(f_4 - f_6) + \cdots + \frac{n-2}{2}(f_{n-2} - f_n) + \frac{n}{2}f_n\right).$$

Die Größen f_{2k} sollen so bestimmt werden, daß $\beta_0 = 0$ ist, und daß

$$f_2 - f_4 = \sin 2u_r \qquad f_4 - f_6 = \sin 4u_r \cdots,$$

$$f_{n-4} - f_{n-2} = \sin(n-4)u_r \quad f_{n-2} - f_n = \sin(n-2)u_r,$$

wodurch sie eindeutig festgelegt sind; $u_r = \frac{r}{n}\pi$. Dann wird

* Siehe Krause: Zur Theorie der U.-B. Z. u. F. Berichte 1902, III, S. 190 ff.

$$\beta_s = \frac{4}{ns}\left(\sin 2u_r \cdot \sin 2\frac{s}{n}\pi + \sin 4u_r \sin 4\frac{s}{n}\pi + \cdots + \sin(n-2)u_r \sin(n-2)\frac{s}{n}\pi\right)$$

$$= \frac{2}{ns}\left[\left(\cos 2\frac{r-s}{n}\pi + \cos 4\frac{r-s}{n}\pi + \cdots + \cos(n-2)\frac{r-s}{n}\pi\right)\right.$$

$$\left. - \left(\cos 2\frac{r+s}{n}\pi + \cos 4\frac{r+s}{n}\pi + \cdots + \cos(n-2)\frac{r+s}{n}\pi\right)\right].$$

Man erkennt, daß im allgemeinen $\beta_s = 0$ ist; nur wenn $s = ln \pm r$ ist, erhält man

$$\beta_{ln+r} = \frac{1}{ln+r} \qquad \beta_{ln-r} = \frac{-1}{ln-r},$$

und es ist

$$\text{I} \qquad f(y) = \frac{\cos ry}{r} + \sum\left(\frac{\cos(ln+r)y}{ln+r} - \frac{\cos(ln-r)y}{ln-r}\right).$$

b) Die oben angegebene Funktion soll in eine Sinusreihe

$$f(y) = \alpha_1 \sin y + \alpha_2 \sin 2y + \cdots$$

entwickelt werden.

$$\alpha_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\sin sy\,dy = \frac{-4}{ns}\left[-f_2 + (f_2 - f_4)\cos 2\frac{s}{n}\pi + (f_4 - f_6)\cos 4\frac{s}{n}\pi + \cdots\right.$$

$$\left. + (f_{n-2} - f_n)\cos\frac{n-2}{n}s\pi + f_n \cos s\pi\right].$$

Es sei

$$f_2 = -\tfrac{1}{2} \quad f_2 - f_4 = \cos 2u_r \quad f_4 - f_6 = \cos 4u_r \cdots \quad f_{n-2} - f_n = \cos(n-2)u_r,$$

wodurch die Konstanten eindeutig bestimmt sind. Dann wird $\alpha_s = 0$, ausgenommen $s = ln \pm r$, wofür man erhält

$$\alpha_{ln+r} = \frac{-1}{ln+r} \qquad \alpha_{ln-r} = \frac{-1}{ln-r},$$

so daß also

$$\text{II} \qquad -f(y) = \frac{\sin ry}{r} + \sum\left(\frac{\sin(ln+r)y}{ln+r} + \frac{\sin(ln-r)y}{ln-r}\right) \text{ ist.}$$

II. Nun soll das Intervall $0 - \pi$ in die Teilintervalle zerlegt werden

$$0 - \frac{\pi}{n},\quad \frac{\pi}{n} - 3\frac{\pi}{n},\quad 3\frac{\pi}{n} - 5\frac{\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{n-3}{n}\pi - \frac{n-1}{n}\pi,\quad \frac{n-1}{n}\pi - \pi,$$

in denen eine Funktion $f(y)$ lauter konstante Werte

$$2\frac{\pi}{n}f_1,\quad 2\frac{\pi}{n}f_3,\quad 2\frac{\pi}{n}f_5,\quad \ldots,\quad 2\frac{\pi}{n}f_{n-1},\quad 2\frac{\pi}{n}f_n$$

annehmen soll, die noch näher zu bestimmen sind.

a) Die Funktion soll in eine Cosinusreihe $f(y) = \frac{1}{2}\beta_0 + \sum_1^\infty \beta_s \cos sy$ verwandelt werden.

$$\beta_s = \frac{4}{ns}\left((f_1 - f_3)\sin\frac{s}{n}\pi + (f_3 - f_5)\sin 3\frac{s}{n}\pi \cdots\right.$$

$$\left. + (f_{n-3} - f_{n-1})\sin(n-3)\frac{s}{n}\pi + (f_{n-1} - f_n)\sin\frac{(n-1)s}{n}\pi\right).$$

Setzt man $\beta_0 = 0$ und

$$f_1 - f_3 = \sin u_r \quad f_3 - f_5 = \sin 3u_r \cdots \qquad f_{n-1} - f_n = \sin(n-1)u_r,$$

so wird $\beta_s = 0$, außer

$$\beta_{ln+r} = \frac{(-1)^l}{ln+r} \qquad \beta_{ln-r} = -\frac{(-1)^l}{ln-r},$$

also

III $$f(y) = \frac{\cos ry}{r} + \sum (-1)^l \left(\frac{\cos(ln+r)y}{ln+r} - \frac{\cos(ln-r)y}{ln-r}\right).$$

b) Die Funktion ist in eine Sinusreihe $f(y) = \sum_1^\infty \alpha_s \sin sy$ zu verwandeln.

$$\alpha_s = -\frac{4}{ns}\Big(-f_1 + (f_1 - f_3)\cos\frac{s}{n}\pi + (f_3 - f_5)\cos 3\frac{s}{n}\pi + \cdots$$
$$+ (f_{n-1} - f_n)\cos(n-1)\frac{s}{n}\pi + f_n \cos s\pi\Big).$$

Man definiere die Konstanten durch

$f_1 = 0 \quad f_1 - f_3 = \cos u_r \quad f_3 - f_5 = \cos 3u_r \cdots \qquad f_{n-1} - f_n = \cos(n-1)u_r$

dann ist

IV $$-f(y) = \frac{\sin ry}{r} + \sum (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{ln+r} + \frac{\sin(ln-r)y}{ln-r}\right).$$

Integriert man nun die Fourierschen Reihen I—IV von 0 bis y, so erhält man Reihen, die Züge von aneinander schließenden Geraden darstellen; es sind dieselben, von denen Krause an der zitierten Stelle ausgeht, während sie also hier schon das Ergebnis einer Integration sind.

Durch fortgesetzte Integration erhält man dann trigonometrische Reihen von der Form

A)

1. $$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

2. $$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}}\right),$$

3. $$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} + \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

4. $$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}}\right),$$

5. $$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

6. $$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}}\right),$$

7. $$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} + \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

8. $$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}}\right).$$

Krause* zeigt nun, daß diese Reihen die Ultra-Bernoullischen Funktionen bedeuten, und zwar im Intervalle $0 < y < \frac{2\pi}{n}$ die Reihen 1.— 4. nacheinander

$$\frac{(-1)^{\mu}}{2\mu!}\frac{i}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+1} B'_{2\mu}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right); \qquad \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)!}\frac{i}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+2} B'_{2\mu+1}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right);$$

$$\frac{(-1)^{\mu+1}}{2\cdot(2\mu)!}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+1} B''_{2\mu}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right); \qquad \frac{(-1)^{\mu}}{2\cdot(2\mu+1)!}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+2} B''_{2\mu+1}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right),$$

und im Intervalle $0 < y < \frac{\pi}{n}$ die Reihen 5.— 8. nacheinander

$$i\frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1} A'_{2\mu}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right); \qquad i\frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+2} A'_{2\mu+1}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right);$$

$$\frac{(-1)^{\mu+1}}{(2\mu)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1} A''_{2\mu}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right); \qquad \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+2} A''_{2\mu+1}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right).$$

B) Zur näheren Untersuchung des Verlaufes einer Kurve, wie sie durch die obenerwähnten Reihen A) dargestellt wird, gehen wir von dem Falle $2\mu = 2$ aus; wir untersuchen also erst die Züge zusammenhängender Geraden, deren Gleichungen lauten

$$\text{I}' \qquad f(y) = \frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right),$$

$$\text{II}' \qquad f(y) = \frac{\cos ry}{r^2} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right),$$

$$\text{III}' \qquad f(y) = \frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^{\infty}(-1)^l\left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right),$$

$$\text{IV}' \qquad f(y) = \frac{\cos ry}{r^2} + \sum_1^{\infty}(-1)^l\left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right).$$

Die Untersuchung von I′ soll genauer geführt werden; bei II′—IV′, deren Diskussion analog ist, soll nur das Resultat angegeben werden.

I′ stellt einen Geradenzug dar, dessen Geraden in den Intervallen $\frac{2(h-1)}{n}\pi - \frac{2h}{n}\pi$ verlaufen. Es sei $0 < r \leqq n$; wir können uns beschränken auf $0 < r \leqq \frac{n}{2}$; denn setzt man $r' = n - r$, so erhält man

$$f(y) = \frac{\sin r'y}{r'^2} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{\sin(ln+r')y}{(ln+r')^2} - \frac{\sin(ln-r')y}{(ln-r')^2}\right)$$

$$= \frac{\sin(n-r)y}{(n-r)^2} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{\sin((l+1)n-r)y}{((l+1)n-r)^2} - \frac{\sin((l-1)n+r)y}{((l-1)n+r)^2}\right)$$

$$= -\frac{\sin ry}{r^2}\Bigg\} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right)\Bigg\},$$

* [25]) § 10.

wie sich durch einfaches Umstellen ergibt. Also ist der Geradenzug für $n - r$ das Spiegelbild desjenigen für r in bezug auf die y-Achse, und man kann sich mit der Untersuchung der Fälle $0 < r \leqq \frac{n}{2}$ begnügen. Dann können wir uns auf die Annahme beschränken, daß r und n prim zueinander sind.

Man setze nämlich $r = r_1 \cdot \beta$, $n = n_1 \cdot \beta$; β sei der größte gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen n und r; r_1 und n_1 seien also relativ prim zueinander.

„Bemerkt sei noch, daß n in allen vorangehenden Fällen gerade oder ungerade sein kann, und daß sich die Reihen I—IV unter A) ebenso für ein ungerades n gestalten.“

a) Es sei n_1 gerade; man setze in I' $y_1 = y + \frac{\pi}{\beta}$, dann folgt

$$f(y_1) = \frac{\sin r y_1}{r^2} + \sum \left(\frac{\sin (ln + r) y_1}{(ln + r)^2} - \frac{\sin (ln - r) y_1}{(ln - r)^2} \right)$$

$$= \frac{\sin (r y + r_1 \pi)}{r^2 \beta^2} + \sum \left(\frac{\sin ((ln + r) y + (l n_1 + r_1) \pi)}{(l n_1 + r_1)^2 \beta_1^2} - \frac{\sin ((ln - r) y + (l n_1 - r_1) \pi)}{(l n_1 - r_1)^2 \beta^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{\sin r y_1}{r_1^2} + \sum \left(\frac{\sin (ln + r) y_1}{(l n_1 + r_1)^2} - \frac{\sin (ln - r) y_1}{(l n_1 - r_1)^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{(-1)^{r_1}}{\beta^2} \left\{ \frac{\sin r y}{r_1^2} + \sum \left(\frac{\sin (ln + r) y}{(l n_1 + r_1)^2} - \frac{\sin (ln - r) y}{(l n_1 - r_1)^2} \right) \right\},$$

oder $f\left(y + \frac{\pi}{\beta}\right) = - f(y)$, und also

$$f(y) = f\left(y + \frac{2\pi}{\beta}\right) = f\left(y + \frac{4\pi}{\beta}\right) = \cdots = - f\left(y + \frac{\pi}{\beta}\right) = - f\left(y + \frac{3\pi}{\beta}\right) = \cdots$$

d. h. die Geradenzüge sind, vom Vorzeichen abgesehen, in einem Intervalle von $\frac{\pi}{\beta}$ ebenso angeordnet wie in dem vorangehenden. Man kann schreiben

$$\beta^2 f^{(n, r)}(y) = \frac{\sin r_1 \cdot \beta y}{r_1^2} + \sum \left(\frac{\sin (l n_1 + r_1) \cdot \beta y}{(l n_1 + r_1)^2} - \frac{\sin (l n_1 - r_1) \cdot \beta y}{(l n_1 - r_1)^2} \right)$$

$$= \frac{\sin r_1 y'}{r_1^2} + \sum \left(\frac{\sin (l n_1 + r_1) y'}{(l n_1 + r_1)^2} - \frac{\sin (l n_1 - r_1) y'}{(l n_1 - r_1)^2} \right).$$

$\beta^2 f^{(n, r)}(y) = f^{(n_1, r_1)}(y')$. Durchläuft also y ein Intervall von $\frac{\pi}{\beta}$ Länge, $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{\beta}$, so durchläuft y' das Intervall $0 \leqq y' \leqq \pi$. Die Ordinate von y' ist das β^2fache derjenigen von y. Es ist das Intervall $\frac{\pi}{\beta}$ ersetzt durch einen Linienzug mit den Konstanten $r_1\, n_1$, der zu dem im Intervalle $\frac{\pi}{\beta}$ affin ist, und daher in bezug auf Schnittpunkte mit der y-Achse und Maxima dieselben Eigenschaften aufweist wie dieser.

b) n_1 sei ungerade. Man substituiere in I' $y_1 = \frac{2\pi}{\beta} - y$, um zu erhalten $f\left(\frac{2\pi}{\beta} - y\right) = - f(y)$; d. h. die Kurve besteht aus β Teilintervallen $\frac{\pi}{\beta}$, von denen man eins aus dem vorangehenden erhält, wenn man dieses

um seinen Endpunkt um 180° dreht; auch hier gilt die Relation $\beta^2 \cdot f^{(n,r)}(y) = f^{(n_1, r_1)}(y')$ und das weiter unter a) Gesagte.

Zur Feststellung der Anzahl von Schnittpunkten mit der y-Achse und der Maxima und Minima kann man sich also auf Linienzüge beschränken, bei denen n und r prim sind. Haben nämlich n und r den größten Faktor β gemeinsam, so untersucht man den Linienzug $f^{\left(\frac{n}{\beta}, \frac{r}{\beta}\right)}(y)$ und multipliziert die Anzahl der Schnittpunkte und Maxima mit β, um die des ursprünglichen zu erhalten.

Linienzug I' besteht aus Geraden, die in Intervallen $\frac{2c}{n}\pi - \frac{2(c+1)}{n}\pi$ $\left(c = 0, 1, \ldots \frac{1}{2}(n - \frac{1}{2});\ n \begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right)$ verlaufen. Soll in einem solchen ein Schnittpunkt gelegen sein, so muß $f\left(\frac{2c}{n}\pi\right)$ ein anderes Vorzeichen haben als $f\left(\frac{2(c+1)}{n}\pi\right)$; und umgekehrt, wenn Vorzeichenwechsel stattfindet, so ist in diesem Intervalle ein Schnittpunkt.

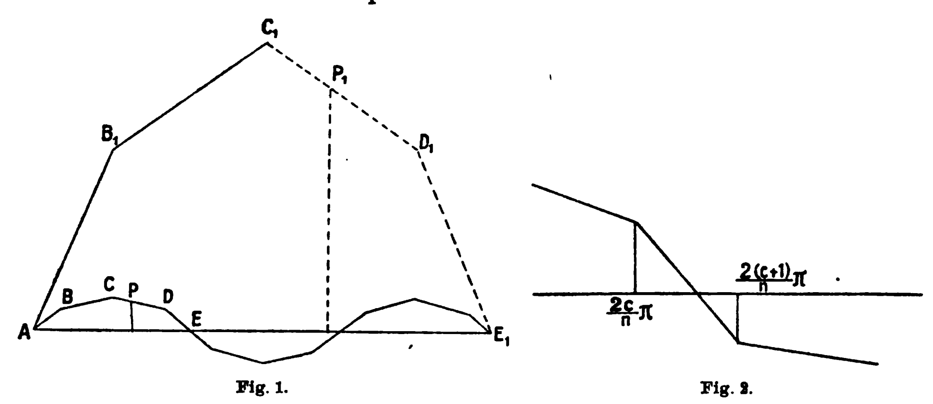


Fig. 1. Fig. 2.

„Vorausgesetzt sei für alle folgenden Untersuchungen, daß der Punkt, der zu $y = 0$ gehört, zum betrachteten Intervalle $0 - \pi$, der zu $y = \pi$ gehörige aber nicht dazu zu rechnen ist."

Es ist nun

$$f\left(\frac{2c}{n}\pi\right) = \sin\frac{2cr}{n}\pi\left\{\frac{1}{r^2} + \sum\left(\frac{1}{(ln+r)^2} + \frac{1}{(ln-r)^2}\right)\right\} = \sin\frac{2cr}{n}\pi\cdot\left\{+\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}(-1)\frac{-1}{2\sin^2 u_r}\right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{n^2\sin^2 u_r}\cdot\sin\frac{2cr}{n}\pi. \qquad \text{(Krause, S. 155, 160.)}$$

$f\left(\frac{2c}{n}\pi\right)$ ändert also das Zeichen mit $\sin\frac{2cr}{n}\pi$; wir erhalten die Reihe Werte

1) $\sin 0\cdot\frac{2r}{n}\pi \quad \sin 1\cdot\frac{2r}{n}\pi \quad \sin 2\cdot\frac{2r}{n}\pi \ldots \quad \sin\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\cdot 2\frac{r}{n}\pi \quad \sin r\pi.$

Das Argument des Sinus läuft von 0 bis $r\pi$; die Differenz zweier aufeinander folgender Argumente ist $\frac{2r}{n}\pi \leqq \pi$, da $r \leqq \frac{n}{2}$ sein soll; daher werden alle nur irgendwie möglichen Zeichenwechsel zwischen $\sin 0\pi$ und $\sin r\pi$ in 1) vorkommen; es sind dies aber r; also liegen zwischen $y = 0$ und $y = \pi$ r Schnittpunkte.

„Weiter sei für alles Folgende bemerkt, daß unter Extrem der Kürze halber sowohl die höchsten als auch die tiefsten Stellen des Linienzuges verstanden sein sollen."

Ein Extrem kann naturgemäß nur für Werte $y = \frac{2c}{n}\pi$ eintreten, und zwar dann, wenn die vorangehende Gerade ansteigt $\left(\varphi_{2c} < \frac{\pi}{2}\right)$ und die folgende fällt $\left(\varphi_{2(c+1)} > \frac{\pi}{2}\right)$, oder umgekehrt; mit anderen Worten, $\operatorname{tg} \varphi_{2c} > 0$ und $\operatorname{tg} \varphi_{2(c+1)} < 0$ oder umgekehrt. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist also, daß die Tangente des Neigungswinkels das Zeichen wechselt. Nun ist $\operatorname{tg} \varphi_{2c} = \frac{2\pi}{n} f_{2c} = \frac{\pi}{n} \frac{\cos(2c-1)u_r}{\sin u_r} = \frac{\pi}{n \sin u_r} \cos(2c-1)u_r$, $\operatorname{tg} \varphi_{2c}$ ändert also das Zeichen mit $\cos \frac{(2c-1)r}{n}\pi$, und es ergibt sich die Reihe von Werten

$$\cos\left(-\frac{r}{n}\pi\right) \quad \cos\frac{r}{n}\pi \quad \cos\frac{3r}{n}\pi \cdots \cos\frac{n-\frac{2}{3}}{n}r\pi \quad \cos\frac{n-\frac{0}{1}}{n}r\pi.$$

Analog dem Obigen folgt, daß auch hier r-maliger Zeichenwechsel eintritt, daß es also im ganzen r Extreme gibt.

Da die Fouriersche Reihe I' in den Intervallen $-\pi$ bis 0, -2π bis $-\pi, \ldots, \pi$ bis 2π, 2π bis $3\pi, \ldots$ dasselbe oder das entgegengesetzt gleiche Bild bietet wie von 0 bis π, und da der gesamte Linienzug von $-k\pi$ bis $+s\pi$ stetig ist, so folgt, daß im Intervalle 0 bis π mindestens ebensoviele Extreme wie Nullstellen vorhanden sein müssen, und da zwischen je zwei aufeinander folgenden Nullstellen mindestens ein Extrem liegen muß, so folgt, weil es r Nullstellen und ebensoviele Extreme zwischen 0 und π gibt, daß auch nur ein Extrem von ihnen eingeschlossen wird. Wir können zusammenfassend sagen:

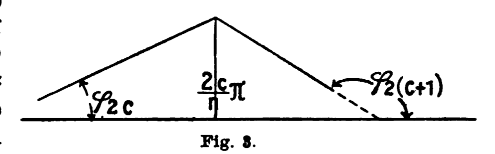


Fig. 3.

Satz: Der Linienzug I' hat für $0 < r \leqq \frac{n}{2}$ im Intervalle $0 \leqq y < \pi$ r Schnittpunkte mit der y-Achse und r Extreme, die sich abwechseln, für $\frac{n}{2} \leqq r < n$ $n-r$ Nullstellen und $n-r$ Extreme, die sich abwechseln.

Es folgt dies aus den oben gemachten Bemerkungen.

Denselben Satz kann man für die Linienzüge II'—IV' nachweisen.

Um nun zu zeigen, daß auch die aus I durch Integration gewonnenen Reihen r Nullstellen und Extreme $\left(r < \frac{n}{2}, \text{ für } r > \frac{n}{2}: n-r\right)$ haben, kann man folgendermaßen verfahren: die Reihen haben die Form

$$f_{2\mu}(y) = \frac{\sin ry}{r^{2\mu}} + \sum\left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu}} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu}}\right),$$

$$f_{2\mu+1}(y) = \frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum\left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

wobei, von unwesentlichen Größen abgesehen, $f_{2\mu+1}(y)$ die Integralfunktion von $f_{2\mu}(y)$ ist. Angenommen, $f_{2\mu}(y)$ habe r Nullstellen $y_1, y_2, \ldots y_r$; dann hat daselbst $f_{2\mu+1}(y)$ Extreme. Ferner ist

$$f_{2\mu+1}\left(\frac{2c}{n}\pi\right) = \cos\frac{2rc}{n}\pi\left\{\frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right)\right\}$$
$$= \varphi(r, n, \mu)\cos\frac{2rc}{n}\pi.$$

Die Größe $\varphi(r, n, \mu)$ ist eine U.-B. Z. Man lasse c alle Werte durchlaufen $c = 0, 1, \ldots \frac{1}{2}(n - \frac{1}{2})$, und erkennt, daß in der Reihe der $f_{2\mu+1}\left(\frac{2c}{n}\pi\right)$ r-maliger Zeichenwechsel eintritt; daher müssen in mindestens r Intervallen $\frac{2c}{n}\pi$ bis $\frac{2(c+1)}{n}\pi$ mindestens r Schnittpunkte vorhanden sein, da der Kurvenzug stetig ist. Nun sind aber zwischen 0 und π gerade r Extreme; dann dürfen aber nur r Schnittpunkte da sein; denn sonst müßte, da zwischen je zwei Nullstellen mindestens ein Extrem liegen muß, es auch mehr Extreme geben. Also hat dann $f_{2\mu+1}$ gerade r Schnittpunkte, und zwar liegt in jedem Intervalle $\frac{2c}{n}\pi$ bis $\frac{2(c+1)}{n}\pi$ höchstens ein solcher. Dann hat aber $f_{2\mu+2}(y)$, welches, von unwesentlichen Größen abgesehen, die Integrationsfunktion von $f_{2\mu+1}(y)$ ist, r Extreme. Dann ist

$$f_{2\mu+2}\left(\frac{2c}{n}\pi\right) = \sin 2\frac{rc}{n}\pi\left\{\frac{1}{r^{2\mu+2}} + \sum\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+2}}\right)\right\}$$
$$= \psi(r, n, \mu)\sin 2\frac{rc}{n}\pi.$$

$\psi(r, n, \mu)$ ist eine U.-B. Z. Durchläuft c wieder die angegebenen Werte, so findet unter den $f_{2\mu+2}\left(\frac{2c}{n}\pi\right)$ wieder r-maliger Zeichenwechsel statt, also gibt es wieder mindestens r Schnittpunkte, aber auch nicht mehr, analog dem Vorigen usf. Die einzige anfangs gestellte Bedingung, $f_{2\mu}(y)$ habe r Nullstellen, ist für $\mu = 1$, wie oben abgeleitet, erfüllt; also auch für alle $f_{2\mu}(y)$ und $f_{2\mu+1}(y)$. Entsprechend ist der Beweis zu führen für die aus II bis IV durch Integration gewonnenen Reihen, so daß wir, alles zusammenfassend, aussprechen können:

Satz: „Alle die aus I bis IV durch Integration gewonnenen Kurvenzüge [Reihen A)] haben im Intervalle von 0 bis π je r Schnittpunkte und Extreme, sobald $0 < r \leqq \frac{n}{2}$ ist, je $n-r$ Schnittpunkte und Extreme, sobald $\frac{n}{2} \leqq r < n$ ist, und zwar liegt bei den zwei zuerst genannten Gruppen in dem Intervalle $\frac{2c}{n}\pi$ bis $\frac{2(c+1)}{n}\pi$, bei den zwei letzten in dem Intervalle $\frac{2c-1}{n}\pi$ bis $\frac{2c+1}{n}\pi$ höchstens ein Schnittpunkt mit der Achse oder höchstens ein Extrem

$$\left(c = 0, 1, \cdots \frac{1}{2}(n - \tfrac{1}{2})\right).“$$

Mit Hilfe der soeben gewonnenen Resultate ist es nun möglich, die U.-B. F. im Intervalle $0 - 1$, resp. $0 - \frac{1}{2}$ näher zu diskutieren, sobald $u = \frac{r}{n}\pi$ ein rationaler Teil von π ist.

Es ist nach den Formeln A):

$$f(y) = \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu)!}\cdot\frac{i}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+1} B'_{2\mu}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right)$$

$$= \frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right) \qquad 0 \leqq y \leqq \frac{2}{n}\pi, \quad \mu \geqq 1.$$

Man setze $y = \frac{2\pi}{n}$; dann ist

$$f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2r}{n}\pi\left\{\frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right)\right\},$$

$$f(0) = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right).$$

$f(y)$ hat in $y = 0$ einen Maximalwert, da $f'(0) = 0$ ist, wie man sich leicht überzeugt. $f\left(\frac{2\pi}{n}\right) \gtrless 0$, sobald $r \lesseqgtr \frac{n}{4}$ ist. Zieht man in Betracht, daß $f_{(n-r)}(y) = - f_{(n)}(y)$ ist, wie abgeleitet, benutzt man ferner die er-

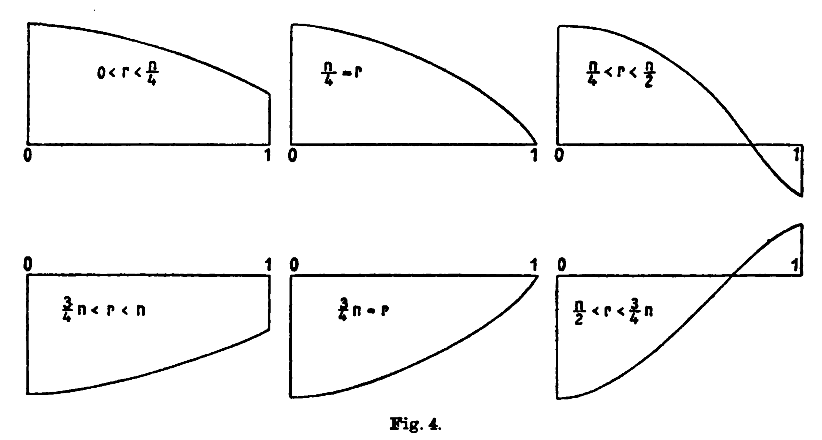


Fig. 4.

haltenen Resultate, und setzt man $z = \frac{ny}{2\pi}$, so daß $0 \leqq z \leqq 1$ ist, so erhält man $(-1)^{\mu} i B'_{2\mu}(z, u_r)$ ist für

1. $0 < r < \frac{n}{4}$ positiv, fallend, vom Maximum ausgehend;
2. $\frac{n}{4} = r$ positiv, bis 0 fallend, vom Maximum ausgehend;
3. $\frac{n}{4} < r < \frac{n}{2}$ vom Maximum ausgehend, erst positiv, dann durch 0 hindurch negativ;
4. $r = \frac{n}{2}$ stets $= 0$, da die einzelnen Glieder der Reihe sich paarweise tilgen;

5. $\frac{n}{2} < r < \frac{3}{4} n$ vom Minimum ausgehend, negativ, steigend, durch 0, positiv;

6. $r = \frac{3}{4} n$ vom Minimum ausgehend, negativ, steigend, bis 0;

7. $\frac{3}{4} n < r < n$ „ „ „ „ steigend.

Spezialfälle:

a) $r = 0$; $\lim\limits_{r=0} \frac{\cos r y}{r^{2\mu+1}} = \infty$; also $f(y) = \infty$; dagegen

$$\lim_{r=0} \left(f(y) - \frac{\cos r y}{r^{2\mu+1}} \right) = 0,$$

da sich die übrigen Glieder paarweise tilgen.

b) $r = \frac{n}{4}$; $(-1)^{\mu} \frac{i}{2 \cdot (2\mu)!} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+1} B'_{2\mu}\left(\frac{ny}{2\pi}, \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \frac{\cos \frac{ny}{4}}{\left(\frac{n}{4}\right)^{2\mu+1}} - \frac{\cos 3 \frac{ny}{4}}{\left(3 \frac{n}{4}\right)^{2\mu+1}} + \frac{\cos 5 \frac{ny}{4}}{\left(5 \frac{n}{4}\right)^{2\mu+1}} - \cdots$$

Setzt man $\frac{ny}{2\pi} = z$, so erhält man für $0 < z < 1$

$$\frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu)!} \frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\mu+1} B'_{2\mu}\left(z, \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\cos (2r-1) z \frac{\pi}{2}}{(2r-1)^{2\mu+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu)!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\mu+1} \cdot E_{2\mu}(z).*$$

$i \cdot B'_{2\mu}\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = E_{2\mu}(z)$; also in diesem Falle geht die U.-B. F. in eine Eulersche Funktion über.

Da $B'_{2\mu}(z, u)$ eine gerade Funktion ist, so gilt die Entwickelung auch für das Intervall $-\frac{2\pi}{n} < y < 0$, also im ganzen für $-\frac{2\pi}{n} < y < \frac{2\pi}{n}$.

Ferner ist

$$f(y) = \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)!} \frac{i}{2} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+2} B'_{2\mu+1}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right)$$

$$= \frac{\sin r y}{r^{2\mu+2}} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\sin (ln + r) y}{(ln + r)^{2\mu+2}} - \frac{\sin (ln - r) y}{(ln - r)^{2\mu+2}} \right) \quad 0 \leqq y \leqq \frac{2\pi}{n}$$

$$f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sin \frac{2\pi}{n} r \left\{ \frac{1}{r^{2\mu+2}} + \sum \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+2}} \right) \right\}.$$

Daraus und aus dem Vorhergehenden folgt für den Verlauf von $(-1)^{\mu} \cdot i B'_{2\mu+1}(z, u_r)$ im Intervall $0 \leqq z \leqq 1$, $z = \frac{ny}{2\pi}$, daß die Kurve im Punkte 0/0 anhebt und weiter für

---

* Siehe Rogel[29]): Theorie der Eulerschen Funktion. Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Jahrgang 1893, XXIII.

$0 < r < \frac{n}{4}$ beständig steigt,

$r = \frac{n}{4}$ „ „ bis zu einem Maximum,

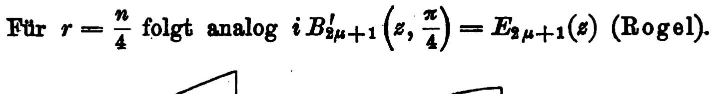
$\frac{n}{4} < r < \frac{n}{2}$ „ „ „ „ „ „ und dann fällt, stets positiv,

$r = \frac{n}{2}$ die Achse bildet,

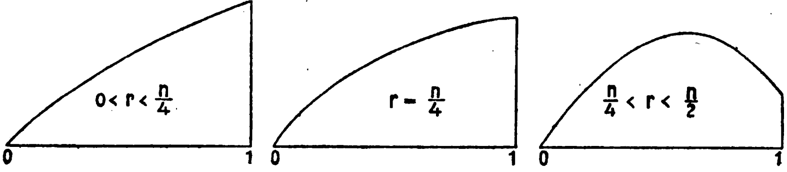
$\frac{n}{2} < r < \frac{3}{4}n$ beständig fällt bis zu einem Min., um, stets negat., dann zu steigen,

$r = \frac{3}{4}n$ „ „ „ „ „ „,

$\frac{3}{4}n < r < n$ „ „ .



Für $r = \frac{n}{4}$ folgt analog $i B'_{2\mu+1}\left(z, \frac{\pi}{4}\right) = E_{2\mu+1}(z)$ (Rogel).



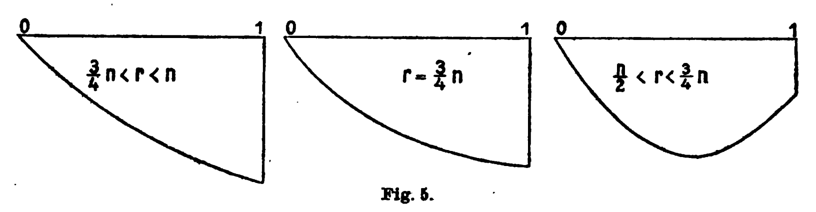


Fig. 5.

Weiter ergibt sich für die Diskussion der übrigen U.-B. F.:

$$(-1)^{\mu+1} B''_{2\mu}(z, u_r)$$

hebt von 0/0 an und steigt beständig für

$$0 < r < \frac{n}{4} \quad \text{und} \quad \frac{3}{4}n < r < n,$$

steigt bis zu einem Maximum für

$$r = \frac{n}{4} \quad \text{und} \quad r = \frac{3}{4}n,$$

steigt bis zu einem Maximum um, stets positiv, zu fallen für

$$\frac{n}{4} < r < \frac{3}{4}n.$$

$$(0 \leqq z \leqq 1.)$$

Spezialfälle:

$$\lim_{r=0}\left[\frac{1}{2}B''_{2\mu}(z, u_r) - \left(\frac{n}{2r\pi}\right)^{2\mu+1}(-1)^{\mu+1}(2\mu)!\sin\frac{2rz\pi}{n}\right] = B_{2\mu}(z)^{*}$$

(Bernoullische Funktion),

---

* Raabe[30]): Bernoullische Funktion. Crellesch. Journal 42.

$$B''_{2\mu}\left(z, \frac{\pi}{4}\right) = E'_{2\mu}(z) + z^{2\mu}, \quad B''_{2\mu}\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{2\mu}}\left(E'_{2\mu}(2z) + (2z)^{2\mu}\right) \text{(Rogel).}$$

$(-1)^{\mu} B''_{2\mu+1}(z, u_r)$ beginnt mit einem Maximalwerte positiv und verläuft für $0 \leqq z \leqq 1$

für $0 < r < \frac{n}{4}$ und $\frac{3}{4}n < r < n$ positiv fallend,

für $r = \frac{n}{4}$ und $r = \frac{3}{4}n$ positiv bis 0 fallend,

für $\frac{n}{4} < r < \frac{3}{4}n$ positiv bis 0 fallend, dann negativ weiter fallend,

für $r = \frac{n}{2}$ positiv fallend, durch 0 bis zu einem Minimum.

Spezialfälle:

$$\lim_{r=0}\left[\frac{1}{2} B''_{2\mu+1}(z, u_r) - (-1)^{\mu}\left(\frac{n}{2\pi r}\right)^{2\mu+2}(2\mu+1)! \cos\frac{2\pi r z}{n}\right] = B_{2\mu+1}(z) + \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+2)} B_{\mu+1},^{*}$$

$$B''_{2\mu+1}\left(z, \frac{\pi}{4}\right) = E'_{2\mu+1}(z) + z^{2\mu+1}, B''_{2\mu+1}\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{2\mu+1}}\left(E_{2\mu+1}(2z) + (2z)^{2\mu+1}\right) \text{(Rogel).}$$

$(-1)^{\mu} i A'_{2\mu}(z, u_r)$ beginnt positiv mit einem Maximum und bleibt für $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ positiv alle für Werte von r, $0 < r < n$, erreicht für $r = \frac{n}{2}$ und $z = \frac{1}{2}$ den Wert 0. $(-1)^{\mu} i A'_{2\mu+1}(z, u)$ beginnt mit 0, bleibt positiv steigend für $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ für $0 < r < n$; das Maximum wird erreicht für

$$r = \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2}.$$

Spezialfälle:

$$i A'_{2\mu}\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = E_{2\mu}(2z), \quad i A'_{2\mu+1}\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = E_{2\mu+1}(2z). \quad \text{Rogel.}$$

$(-1)^{\mu+1} A''_{2\mu}(z, u_r)$ fängt im Nullpunkte an, um dann für $0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}$ und für $0 < r < \frac{n}{2}$ positiv zu steigen, für $\frac{n}{2} < r < n$ negativ zu fallen; für $r = \frac{n}{2}$ ist es konstant $= 0$. $(-1)^{\mu} A'_{2\mu+1}(z, u_r)$ fängt für $0 < r < \frac{n}{2}$ mit einem Maximum an und fällt, stets positiv; für $\frac{n}{2} < r < n$ mit einem Minimum und steigt, stets negativ; für $r = \frac{n}{2}$ ist es konstant $= 0$.

Spezialfälle:

$$\lim_{r=0}\left[A''_{2\mu}(z,u_r) - (2\mu)!(-1)^{\mu+1}\left(\frac{n}{r\pi}\right)^{2\mu+1} \sin 2\frac{\pi r z}{n}\right] = 2\left(B_{2\mu}(2z) - 2^{2\mu} B_{2\mu}(z)\right)$$

$$\lim_{r=0}\left[A''_{2\mu+1}(z, u_r) - (-1)^{\mu}(2\mu+1)!\left(\frac{n}{r\pi}\right)^{2\mu+2} \cos 2\frac{\pi r z}{n}\right]$$

$$= 2\left(B_{2\mu+1}(2z) - 2^{2\mu+1} B_{2\mu+1}(z) - \frac{B_{\mu+1}}{2\mu+2}(-1)^{\mu}(2^{2\mu+1}-1)\right).^{*}$$

Setzt man in der Gruppe der Formeln A) $n = 2m$, $m = 2p + 1$ (n gerade, m ungerade) und substituiert $m - 2k$ für die Größe r, so gehen die Reihen in derselben Folge in diese über:

---

* Raabe[30]): Bernoullische Funktion. Crellesch. Journal 42.

$$
\text{B)}\left\{
\begin{array}{ll}
1. & \sum_0^\infty{}_l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\}, \\
2. & \sum_0^\infty{}_l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}} \right\}, \\
3. & \sum_0^\infty{}_l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} + \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\}, \\
4. & \sum_0^\infty{}_l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}} \right\}, \\
5. & \sum_0^\infty{}_l (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\}, \\
6. & \sum_0^\infty{}_l (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} + \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k)^{2\mu+2}} \right\}, \\
7. & \sum_0^\infty{}_l (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\}, \\
8. & \sum_0^\infty{}_l (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}} \right\}.
\end{array}
\right.
$$

Über den Verlauf der durch B) dargestellten Kurvenzüge kann man dann sofort folgendes aussagen, da $m - 2k > 0$ sein soll:

Satz: „Die unter B) angeführten Kurvenzüge haben im Intervalle 0 bis π je $m - 2k$ Nullpunkte und Extreme, die miteinander abwechseln, und zwar liegt bei den vier zuerst angeführten Gruppen im Intervalle $2\frac{c}{n}\pi$ bis $2\frac{c+1}{n}\pi$, bei den vier letzten zwischen $\frac{2c-1}{n}\pi$ und $\frac{2c+1}{n}\pi (c = 0, 1, \ldots m)$ höchstens ein Nullpunkt und höchstens ein Extrem."

Übrigens sind die Kurvenzüge B) nicht unabhängig voneinander; denkt man sich nämlich in den Zügen 3. 4. 7. 8. das Koordinatensystem um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben, und entwickelt wieder in Fouriersche Reihen, so erhält man der Reihe nach die Züge 5. 6. 1. 2.; erwägt man ferner, daß 2. 4. 6. 8. durch Integration aus 1. 3. 5. 7. erhalten werden, so erkennt man, daß sich die acht Kurvenzüge auf zwei Fundamentalkurvenzüge zurückführen lassen.

Wie die Funktionen A) in den Intervallen $0 - 2\frac{\pi}{n}$, resp. $0 - \frac{\pi}{n}$ die U.-B. F. darstellten, so wird sich in der Folge zeigen, daß die Funktionen B) zwischen 0 und $2\frac{\pi}{n}$, resp. 0 und $\frac{\pi}{n}$ die U.-E. F. sind, über deren Verlauf die Reihen ebenfalls Schlüsse zu ziehen gestatten.

§ 2.

Theorie der Ultra-Eulerschen Zahlen.

Zum Ausgangspunkte der Untersuchung sei gewählt einerseits die bekannte Partialbruchentwickelung der Sekansfunktion:

$$1)\qquad \sec u = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-u} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}+u} - \frac{1}{3\frac{\pi}{2}-u} - \frac{1}{3\frac{\pi}{2}+u} + \cdots$$
$$+ (-1)^l \left\{ \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2}-u} + \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2}+u} \right\} + \cdots$$
$$-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2}.$$

Es ist also

$$2)\qquad \sec(u+x) = \sum_0^\infty {}_l (-1)^l \left\{ \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2}-(u+x)} + \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2}+(u+x)} \right\}.$$

Entwickelt man beide Seiten von 2) um u herum nach Potenzen von x, so müssen, da beide Seiten identisch gleich sind, die Koeffizienten von x^m links und rechts ebenfalls gleich sein. Man erhält dann

$$3)\qquad \sum_0^\infty {}_m \frac{x^m}{m!} \frac{d^m \sec u}{du^m}$$
$$= \sum_0^\infty {}_l (-1)^l \left\{ \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2}-u} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{(2l+1)\frac{\pi}{2}-u}} + \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2}+u} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{(2l+1)\frac{\pi}{2}+u}} \right\}$$
$$= \sum_0^\infty {}_l (-1)^l \left\{ \sum_0^\infty {}_m x^m \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}-u\right]^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}+u\right]^{m+1}} \right) \right\}$$
$$= \sum_0^\infty {}_m x^m \left\{ \sum_0^\infty {}_l (-1)^l \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}-u\right]^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}+u\right]^{m+1}} \right) \right\}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$4a)\qquad T^{(u)}_{2\mu+1} = \sum_0^\infty {}_l (-1)^l \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}-u\right]^{2\mu+1}} + \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}+u\right]^{2\mu+1}} \right),$$

$$4b)\qquad t^{(u)}_{2\mu} = \sum_0^\infty {}_l (-1)^l \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}-u\right]^{2\mu}} - \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}+u\right]^{2\mu}} \right),$$

so ergeben sich die Relationen

$$5a)\qquad \underline{T^{(u)}_{2\mu+1} = \frac{1}{(2\mu)!} \frac{d^{2\mu} \sec u}{du^{2\mu}}}, \qquad 5b)\qquad \underline{t^{(u)}_{2\mu} = \frac{1}{(2\mu-1)!} \frac{d^{2\mu-1} \sec u}{du^{2\mu-1}}}.$$

Anderseits lege man die Partialbruchentwickelung der Tangensfunktion zugrunde:

6) $$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - u} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + u} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} - u} - \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + u} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2} - u} - \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2} + u} + \cdots; \quad -\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2},$$

7) $$\operatorname{tg}(u+x) = \sum_0^\infty{}_l \left\{ \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2} - (u+x)} - \frac{1}{(2l+1)\frac{\pi}{2} + (u+x)} \right\},$$

oder

8) $$\sum_0^\infty{}_m \frac{x^m}{m!} \frac{d^m \operatorname{tg} u}{du^m}$$
$$= \sum_0^\infty{}_l \left\{ \sum_0^\infty{}_m x^m \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} - u\right]^{m+1}} + \frac{(-1)^{m+1}}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} + u\right]^{m+1}} \right) \right\}$$
$$= \sum_0^\infty{}_m x^m \left\{ \sum_0^\infty{}_l \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} - u\right]^{m+1}} + \frac{(-1)^{m+1}}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} + u\right]^{m+1}} \right) \right\}.$$

Führt man weiter ein

9a) $$\tau^{(u)}_{2\mu+1} = \sum_0^\infty{}_l \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} - u\right]^{2\mu+1}} - \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} + u\right]^{2\mu+1}} \right),$$

9b) $$\mathrm{T}^{(u)}_{2\mu} = \sum_0^\infty{}_l \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} - u\right]^{2\mu}} + \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} + u\right]^{2\mu}} \right),$$

so erhält man für diese unendlichen Summen die Beziehungen

10a) $$\tau^{(u)}_{2\mu+1} = \frac{1}{(2\mu)!} \frac{d^{2\mu} \operatorname{tg} u}{du^{2\mu}},$$ 10b) $$\mathrm{T}^{(u)}_{2\mu} = \frac{1}{(2\mu-1)!} \frac{d^{2\mu-1} \operatorname{tg} u}{du^{2\mu-1}}.$$

Nun ist $\sec(u+x) = \dfrac{2}{e^{i(u+x)} + e^{-i(u+x)}}$; setzt man $iu = v$, $ix = y$, so erhält man:

$$\sec(u+x) = \frac{2e^{v+y}}{e^{2(v+y)}+1} = \gamma\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{1!} y + \frac{\varepsilon_2}{2!} y^2 + \cdots\right) = \gamma \cdot e^{\varepsilon \cdot y} \text{ (symbolisch).}$$

Die Größen ε_m, die ja noch von v abhängen, sollen die Ultra-Eulerschen Zahlen (U.-E. Z.) erster Art darstellen; sie sind also die sukzessiven Differentialquotienten von $\dfrac{2e^v}{e^{2v}+1}$, so daß die Beziehung besteht:

$$\gamma \cdot \varepsilon_m = \frac{d^m}{dv^m}\left(\frac{2e^v}{e^{2v}+1}\right) = \frac{d^m}{dv^m}(\sec u),$$
$$\gamma \cdot \varepsilon_m = (-i)^m \frac{d^m \sec u}{du^m}.$$

Definition: „Die U.-E. Z. erster Art sind, von unwesentlichen Faktoren abgesehen, die Differentialquotienten der Sekansfunktion in einem Punkte u und durch die Gleichung definiert:

$$\gamma \cdot \varepsilon_m = (-i)^m \frac{d^m \sec u}{du^m}. \text{“} \tag{11}$$

Dann ergibt sich aber mit Hilfe der Gleichung 5) sofort eine Partialbruchentwickelung der U.-E. Z.:

$$\text{12a)} \left\{ \begin{aligned} \gamma \cdot \varepsilon_{2\mu} &= (-1)^\mu \cdot (2\mu)!\, T^{(u)}_{2\mu+1} \\ &= (-1)^\mu \cdot (2\mu)! \sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} - u\right]^{2\mu+1}} + \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} + u\right]^{2\mu+1}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$\text{12b)} \left\{ \begin{aligned} \gamma \cdot \varepsilon_{2\mu+1} &= i(-1)^{\mu+1} \cdot (2\mu+1)!\, t^{(u)}_{2\mu+2} \\ &= i(-1)^{\mu+1} \cdot (2\mu+1)! \sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} - u\right]^{2\mu+2}} - \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} + u\right]^{2\mu+2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man insbesondere $u = \frac{k}{m}\pi = u_k$, wobei $m = 2p+1$ ungerade und k eine der ganzen Zahlen $-p \leqq k \leqq +p$ ist, so erhält man

$$\gamma(u_k) \cdot \varepsilon_{2\mu}(u_k) = (-1)^\mu \cdot (2\mu)! \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{2\mu+1} \times$$
$$\sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{1}{[(2l+1)m - 2k]^{2\mu+1}} + \frac{1}{[(2l+1)m + 2k]^{2\mu+1}} \right\},$$

$$\gamma(u_k) \cdot \varepsilon_{2\mu-1}(u_k) = i(-1)^\mu \cdot (2\mu-1)! \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{2\mu} \times$$
$$\sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{1}{[(2l+1)m - 2k]^{2\mu}} - \frac{1}{[(2l+1)m + 2k]^{2\mu}} \right\},$$

oder

$$\text{13a)} \left\{ \begin{aligned} &\gamma(u_k) \cdot \varepsilon_{2\mu}(u_k) = (-1)^\mu \cdot (2\mu)! \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{2\mu+1} \overline{T^{(u_k)}_{2\mu+1}}, \\ &\qquad \text{wenn } \overline{T^{(u_k)}_{2\mu+1}} = \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{2\mu+1} \cdot T^{(u_k)}_{2\mu+1}. \end{aligned} \right.$$

$$\text{13b)} \left\{ \begin{aligned} &\gamma(u_k) \cdot \varepsilon_{2\mu-1}(u_k) = i(-1)^\mu \cdot (2\mu-1)! \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{2\mu} \overline{t^{(u_k)}_{2\mu}}, \\ &\qquad \text{wenn } \overline{t^{(u_k)}_{2\mu}} = \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{2\mu} \cdot t^{(u_k)}_{2\mu} \text{ ist.} \end{aligned} \right.$$

$$\text{14a)} \quad \overline{T^{(u_k)}_{2\mu+1}} = \sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{1}{[(2l+1)m - 2k]^{2\mu+1}} + \frac{1}{[(2l+1)m + 2k]^{2\mu+1}} \right\}.$$

$$\text{14b)} \quad \overline{t^{(u_k)}_{2\mu}} = \sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{1}{[(2l+1)m - 2k]^{2\mu}} - \frac{1}{[(2l+1)m + 2k]^{2\mu}} \right\}.$$

Zur Berechnung der U.-E. Z. ε_k kann man nun leicht Rekursionsformeln aufstellen. Aus $\frac{2}{e^{v+y} + e^{-(v+y)}} = \gamma \cdot e^{sy}$ folgt für $e^v = \eta$

$$2 = \gamma\eta e^{(\varepsilon+1)y} + \gamma\eta^{-1} e^{(\varepsilon-1)y},$$

und durch Koeffizientenvergleichung

15) $$2 = \gamma(\eta + \eta^{-1}) \qquad \gamma = \frac{2}{\eta+\eta^{-1}} = \sec u = \gamma$$

und

$$\gamma\eta(\varepsilon+1)^r + \gamma\eta^{-1}(\varepsilon-1)^r = 0 \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

oder

$$\varepsilon_r(\eta+\eta^{-1}) + r_1\varepsilon_{r-1}(\eta-\eta^{-1}) + r_2\varepsilon_{r-2}(\eta+\eta^{-1}) + \cdots$$
$$+ r_1\varepsilon_1(\eta + (-1)^{r-1}\eta^{-1}) + (\eta + (-1)^r\eta^{-1}) = 0.$$

Setzt man $\frac{\eta-\eta^{-1}}{\eta+\eta^{-1}} = i \operatorname{tg} u = a$, so bekommt man die Rekursionsformel

16) $$\begin{cases} \varepsilon_r + a r_1 \varepsilon_{r-1} + r_2\varepsilon_{r-2} + a r_3 \varepsilon_{r-3} + \cdots \\ \quad + \left(\tfrac{1}{2}(1+a) - (-1)^r \tfrac{1}{2}(1-a)\right) r_1\varepsilon_1 + \left(\tfrac{1}{2}(1+a) + (-1)^r \tfrac{1}{2}(1-a)\right) = 0. \end{cases}$$

Aus ihr ergibt sich beispielsweise:

$\varepsilon_1 = -a, \quad \varepsilon_2 = 2a^2 - 1, \quad \varepsilon_3 = -6a^3 + 5a, \quad \varepsilon_4 = 24a^4 - 28a^2 + 5,$

$\varepsilon_5 = -120a^5 + 180a^3 - 61a, \quad \varepsilon_6 = 720a^6 - 1320a^4 + 662a^2 - 61,$

$\varepsilon_7 = -5040a^7 + 10920a^5 - 7266a^3 + 1385a,$

$\varepsilon_8 = 40320a^8 - 100800a^6 + 83664a^4 - 24568a^2 + 1385,$

$\varepsilon_9 = -362880a^9 + 1028160a^7 - 1023120a^5 + 408360a^3 - 50521a,$

$\varepsilon_{10} = 3628800a^{10} - 11491200a^8 + 13335840a^6 - 6749040a^4 + 1326122a^2 - 50521,$

$\varepsilon_{11} = -39916800a^{11} + 139708800a^9 - 185280480a^7 + 113760240a^5 - 30974526a^3 + 2702765a,$

. . . .

Für das Folgende ist es zweckmäßig, die U.-E. Z. ε_r nicht alle zusammen, sondern die geraden ε_{2r} und ungeraden ε_{2r+1} gesondert zu betrachten. Es ist

$$\sec(x+u) + \sec(x-u) = 2\left(\frac{e^{y+v}}{e^{2(y+v)}+1} + \frac{e^{y-v}}{e^{2(y-v)}+1}\right) = 2\cdot\gamma'\cdot e^{\varepsilon' y}$$

eine gerade Funktion für x; daher ist $\varepsilon_1' = \varepsilon_3' = \cdots = 0$. Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$\eta^{-1}e^{3y} + \eta e^y + \eta e^{3y} + \eta^{-1}e^y = \gamma' e^{(\varepsilon'+4)y} + \gamma'\eta^2 e^{(\varepsilon'+2)y} + \gamma'\eta^{-2}e^{(\varepsilon'+2)y} + \gamma' e^{\varepsilon' y},$$

so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung

$$\gamma' = \frac{2}{\eta+\eta^{-1}} = \sec u,$$

$$\gamma'[(\varepsilon'+4)^r + (\eta^2+\eta^{-2})(\varepsilon'+2)^r + \varepsilon_r'] - (\eta+\eta^{-1})(3^r + 1^r) = 0,$$

$$\gamma'[4\cos^2 u\cdot\varepsilon_r' + r_1(4 + 2(4\cos^2 u - 2))\varepsilon_{r-1}' + r_2(4^2 + 2^2(4\cos^2 u - 2))\varepsilon_{r-2}' + \cdots$$
$$+ r_1(4^{r-1} + 2^{r-1}(4\cos^2 u - 2))\varepsilon_1' + (4^r + 2^r(4\cos^2 u - 2))]$$
$$- 2\cos u\,(3^r + 1^r) = 0,$$

und daraus folgen die beiden Rekursionsformeln

$$17a)\begin{cases}\gamma'[4\cos^2 u\cdot\varepsilon'_{2\mu}+(2_\mu)_2(4^2+2^2(4\cos^2 u-2))\varepsilon'_{2\mu-2}+\cdots\\ \qquad +(2_\mu)_2(4^{2(\mu-1)}+2^{2(\mu-1)}(4\cos^2 u-2))+(4^{2\mu}+2^{2\mu}(4\cos^2 u-2))]\\ \qquad -2\cos u\,(3^{2\mu}+1^{2\mu})=0,\end{cases}$$

$$17b)\begin{cases}\gamma'[(2_{\mu+1})_1(4+2(4\cos^2 u-2))\varepsilon'_{2\mu}+(2_{\mu+1})_3(4^3+2^3(4\cos^2 u-2))\varepsilon'_{2\mu-2}+\cdots\\ \qquad +(2_{\mu+1})_3(4^{2\mu-1}+2^{2\mu-1}(4\cos^2 u-2))\varepsilon'_2+(4^{2\mu+1}+2^{2\mu+1}(4\cos^2 u-2))]\\ \qquad -2\cos u\,(3^{2\mu+1}+1^{2\mu+1})=0,\end{cases}$$

in denen also nur die geraden U.-E. Z. auftreten.

Ferner ist

$$f''(x,u)=2+\sec(x+u)-\sec(x-u)=2\left(1+\frac{e^{y+v}}{e^{2(y+v)}+1}-\frac{e^{y-v}}{e^{2(y-v)}+1}\right)=2\gamma''e^{\varepsilon''y},$$

$$f''(x,u)=2+\varepsilon_1''y+\frac{\varepsilon_3''}{3!}y^3+\cdots\qquad \gamma''=1\quad \varepsilon_2''=\varepsilon_4''=\cdots=0.$$

Auch zwischen diesen Größen lassen sich Rekursionsformeln aufstellen, aus denen man die Zahlen ε''_{2k+1} berechnen kann. Es sind diese Größen ε'_{2k} und ε''_{2k+1}, von unwesentlichen Faktoren abgesehen, die alten U.-E. Z., und sollen auch als U.-E. Z. bezeichnet werden. In der Tat ergibt sich durch einfache Addition:

$$2(\gamma'e^{\varepsilon'y}+\gamma''e^{\varepsilon''y})=2(1+\sec(u+x))=2(1+\gamma^{\varepsilon y}),$$

$$\gamma'e^{\varepsilon'y}+\gamma''e^{\varepsilon''y}=1+\gamma e^{\varepsilon y},$$

woraus durch Koeffizientenvergleichung folgt

18) $$\gamma'+\gamma''=1+\gamma\qquad \gamma'\varepsilon_r'+\gamma''\varepsilon_r''=\gamma\varepsilon_r,$$

also

19a) $$\gamma'\varepsilon'_{2\mu}=\gamma\varepsilon_{2\mu}\qquad 19b)\ \ \gamma''\varepsilon''_{2\mu+1}=\gamma\varepsilon_{2\mu+1}.$$

Schließlich sollen noch, da es für die weiteren Untersuchungen notwendig ist, die U.-E. Z. ε_r mit positivem und negativem Argumente u zueinander in Beziehung gebracht werden. Es ist $\sec(x-u)=\sec(u-x)$, also

$$\frac{2e^{-v+y}}{e^{2(-v+y)}+1}=\gamma(-u)\left\{1+\frac{\varepsilon_1(-u)}{1!}y+\frac{\varepsilon_2(-u)}{2!}y^2+\cdots\right\}$$

$$\equiv\frac{2e^{v-y}}{e^{2(v-y)}+1}=\gamma(u)\left\{1-\frac{\varepsilon_1(+u)}{1!}y+\frac{\varepsilon_2(u)}{2!}y^2-\cdots\right\},$$

also durch Vergleichung

19') $$\gamma(-u)\cdot\varepsilon_r(-u)=(-1)^r\gamma(u)\cdot\varepsilon_r(u),$$

daher nach 19)

$$\gamma'(-u)\,\varepsilon'_{2\mu}(-u)=\gamma(u)\,\varepsilon_{2\mu}(u)\qquad \gamma''(-u)\,\varepsilon''_{2\mu+1}(-u)=-\gamma''(u)\,\varepsilon_{2\mu+1}(u).$$

Es ist nun ferner

$$\operatorname{tg}(u+x)=-i\frac{e^{i(u+x)}-e^{-i(u+x)}}{e^{i(u+x)}+e^{-i(u+x)}}=-i\frac{e^{z+w}-1}{e^{z+w}+1}=-i\left(1-\frac{2}{e^{z+w}+1}\right)=i\left(\frac{2}{e^{z+w}+1}-1\right).$$

Nun setze man

$$\frac{2}{e^{z+w}+1}=\gamma_1e^{\delta\cdot z}=\gamma_1\left(1+\frac{\delta_1}{1!}z+\frac{\delta_2}{2!}z^2+\cdots\right).\qquad z=2ix,\ w=2iu.$$

Durch die Größen δ_r, die die sukzessiven Differentialquotienten von $\frac{2}{e^{2v}+1}$ darstellen, ist eine zweite Gruppe von U.-E. Z. definiert.

$$\gamma_1 \delta_r = \frac{d^r}{dw^r}\left(\frac{2}{e^w+1}\right) = -i\frac{d^r}{dw^r}\left(\frac{2i}{e^w+1} - i\right) = \left(-\frac{i}{2}\right)^{r+1} \cdot 2 \cdot \frac{d^r \cdot \operatorname{tg} u}{du^r}.$$

Definition: „Die U.-E. Z. zweiter Art sind, von unwesentlichen Faktoren abgesehen, die Differentialquotienten der Tangensfunktion in einem Punkte u und durch die Gleichung definiert:

20) $$\gamma_1 \delta_r = \left(-\frac{i}{2}\right)^{r+1} \cdot 2 \cdot \frac{d^r \operatorname{tg} u}{du^r}.\text{“}$$

Für die U.-E. Z. δ_r ergeben sich mit Hilfe von 10) folgende Partialbrüche

21a) $$\begin{cases} \gamma_1 \delta_{2\mu} = -i\left(-\frac{i}{2}\right)^{2\mu} \cdot (2\mu)!\ \tau^{(u)}_{2\mu+1} \\ \quad = -i\left(-\frac{i}{2}\right)^{2\mu}(2\mu)! \sum_0^\infty \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}-u\right]^{2\mu+1}} - \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}+u\right]^{2\mu+1}}\right); \end{cases}$$

21b) $$\begin{cases} \gamma_1 \delta_{2\mu-1} = 2\left(\frac{-i}{2}\right)^{2\mu} \cdot (2\mu-1)!\ \mathrm{T}^{(u)}_{2\mu} \\ \quad = 2\left(\frac{-i}{2}\right)^{2\mu} \cdot (2\mu-1)! \sum_0^\infty \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}-u\right]^{2\mu}} + \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2}+u\right]^{2\mu}}\right). \end{cases}$$

Insbesondere ist für $u = u_k = \frac{k}{m}\pi$, $m = 2p+1$,

$$\gamma_1(u_k)\,\delta_{2\mu}(u_k) = 2 \cdot (2\mu)!\left(\frac{-im}{\pi}\right)^{2\mu+1} \sum_0^\infty \left(\frac{1}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} - \frac{1}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}}\right),$$

$$\gamma_1(u_k)\,\delta_{2\mu-1}(u_k) = 2 \cdot (2\mu-1)!\left(\frac{-im}{\pi}\right)^{2\mu} \sum_0^\infty \left(\frac{1}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu}} + \frac{1}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu}}\right),$$

oder

22a) $\gamma_1(u_k)\,\delta_{2\mu}(u_k) = 2 \cdot (2\mu)! \cdot \left(\frac{-im}{\pi}\right)^{2\mu+1} \overline{\tau^{(u_k)}_{2\mu+1}}$, falls $\overline{\tau^{(u_k)}_{2\mu+1}} = \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{2\mu+1} \tau^{(u_k)}_{2\mu+1}$;

22b) $\gamma_1(u_k)\,\delta_{2\mu-1}(u_k) = 2 \cdot (2\mu-1)!\left(\frac{-im}{\pi}\right)^{2\mu} \overline{\mathrm{T}^{(u_k)}_{2\mu}}$, „ $\overline{\mathrm{T}^{(u_k)}_{2\mu}} = \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{2\mu} \cdot \mathrm{T}^{(u_k)}_{2\mu}$

ist, wobei also

$$\overline{\tau^{(u_k)}_{2\mu+1}} = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} - \frac{1}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}}\right),$$

$$\overline{\mathrm{T}^{(u_k)}_{2\mu}} = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu}} + \frac{1}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu}}\right) \text{ ist.}$$

Zur Berechnung dieser U.-E. Z. δ_r kann man ebenfalls leicht eine Rekursionsformel aufstellen: aus $\frac{2}{e^{s+w}+1} = \gamma_1 e^{\delta s}$ folgt für $e^w = \eta_1$

$$2 = \gamma_1(e^{(\delta+1)z}\eta_1 + e^{\delta z}),$$

woraus durch Koeffizientenvergleichung sich ergibt

23) $$2 = \gamma_1(\eta_1 + 1), \quad \gamma_1 = \frac{2}{e^{2ui}+1} = \frac{2e^{-ui}}{e^{ui}+e^{-ui}} = 1 - i\,\mathrm{tg}\,u = \gamma_1,$$

$$\eta_1(\delta+1)^r + \delta_r = 0.$$

Setzt man $1 + \eta_1^{-1} = 1 + e^{-2ui} = 2\cos u\,(\cos u - i\sin u) = a_1$, so erhält man

24) $$a_1\delta_r + r_1\delta_{r-1} + r_2\delta_{r-2} + \cdots + r_1\delta_1 + 1 = 0.$$

Aus dieser ergibt sich

$$\delta_1 = \frac{-1}{a_1}, \quad \delta_2 = \frac{2}{a_1^2} - \frac{1}{a_1}, \quad \delta_3 = -\frac{6}{a_1^3} + \frac{6}{a_1^2} - \frac{1}{a_1},$$

$$\delta_4 = \frac{24}{a_1^4} - \frac{36}{a_1^3} + \frac{14}{a_1^2} - \frac{1}{a_1} \cdots$$

Auch in diesem Falle wird es für das Folgende zweckmäßig sein, die geraden U.-E. Z. δ_{2k} von den ungeraden δ_{2k+1} zu trennen. Es ist

$$\mathrm{tg}(x+u) + \mathrm{tg}(x-u) = 2i\left(\frac{1}{e^{z+w}+1} + \frac{1}{e^{z-w}+1} - 1\right)$$

eine ungerade Funktion von z. Es sei $\dfrac{1}{e^{z+w}+1} + \dfrac{1}{e^{z-w}+1} = \gamma_1' e^{\delta' z}$,

$$\delta_2' = \delta_4' = \cdots = 0, \quad \gamma_1' = 1,$$

$$\mathrm{tg}(x+u) - \mathrm{tg}(x-u) = 2i\left(\frac{1}{e^{z+w}+1} - \frac{1}{e^{z-w}+1}\right) = 2i\gamma_1'' e^{\delta'' z},$$

$\delta_1'' = \delta_3'' = \cdots = 0$, $\gamma_1'' = -i\,\mathrm{tg}\,u$. Für die neuen U.-E. Z. δ_{2k}'' und δ_{2k+1}' ist es eben so leicht, Rekursionsformeln zu ihrer Berechnung aufzustellen, wie für die Größen ε_{2k}' und ε_{2k+1}''; es soll aber nur noch ihr Zusammenhang mit den Größen δ_r klargelegt werden. Durch einfache Addition erhält man nämlich

$$\gamma_1' e^{\delta' z} + \gamma_1'' e^{\delta'' z} = \frac{2}{e^{z+w}+1} = \gamma_1 e^{\delta z},$$

also

25) $$\gamma_1' + \gamma_1'' = \gamma_1, \quad \gamma_1'\delta_r' + \gamma_1''\delta_r'' = \gamma_1\delta_r,$$

oder

26a) $$\gamma_1'\delta_{2\mu+1}' = \gamma_1\delta_{2\mu+1}, \quad \text{26b)}\ \gamma_1''\delta_{2\mu}'' = \gamma_1\delta_{2\mu}.$$

Schließlich ist

$$\gamma_1(-u)\left(1 + \frac{\delta_1(-u)}{1!}y + \frac{\delta_2(-u)}{2!}y^2 + \cdots\right) = \gamma_1(-u)e^{\delta(-u)\cdot y} = \frac{2}{e^{y-w}+1}$$

$$= \frac{2e^{-y+w}}{e^{-y+w}+1} = 2 - \frac{2}{e^{-y+w}+1} = 2 - \gamma_1(u)e^{-\delta(u)y}$$

$$= 2 - \gamma_1(u)\left(1 - \frac{\delta_1(u)}{1!}y + \frac{\delta_2(u)}{2!}y^2 - \cdots\right),$$

und daraus folgt

26′) $$\gamma_1(-u) + \gamma_1(u) = 2, \quad \gamma_1(-u)\,\delta_r(-u) = (-1)^{r+1}\gamma_1(u)\,\delta_r(u),$$

also nach 26)

$$\gamma_1'(-u)\,\delta_{2\mu+1}'(-u) = \gamma_1'(u)\,\delta_{2\mu+1}'(u), \quad \gamma_1''(-u)\,\delta_{2\mu}''(u) = -\gamma_1''(u)\,\delta_{2\mu}''(u).$$

§ 3.

Theorie der Ultra-Eulerschen Funktionen.

Man gehe von der Formel aus:

$$\gamma \cdot e^{\varepsilon y} = \frac{2e^{y+v}}{e^{2(y+v)}+1}, \quad \text{oder} \quad 2\eta e^{y} = \gamma \eta^{2} e^{(\varepsilon+2)y} + \gamma e^{\varepsilon y}.$$

Erweitert man letzte Gleichung der Reihe nach mit e^{2y}, $e^{4y} \dots e^{2(l-1)y}$ und vergleicht die Koeffizienten des Gliedes y^{μ} links und rechts, so erhält man das System

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\eta\, 1^{\mu} &= \gamma \eta^{2} (\varepsilon+2)^{\mu} + \gamma \varepsilon_{\mu}, \\ 2\eta\, 3^{\mu} &= \gamma \eta^{2} (\varepsilon+4)^{\mu} + \gamma (\varepsilon+2)^{\mu}, \\ 2\eta\, 5^{\mu} &= \gamma \eta^{2} (\varepsilon+6)^{\mu} + \gamma (\varepsilon+4)^{\mu}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 2\eta (2l-1)^{\mu} &= \gamma \eta^{2} (\varepsilon+2l)^{\mu} + \gamma [\varepsilon + 2(l-1)]^{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Multipliziert man die einzelnen Gleichungen von 1) der Reihe nach mit $1, \; -\eta^{2}, \; +\eta^{4} \cdots (-1)^{l-1} \eta^{2(l-1)}$ und addiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\left(\eta \cdot 1^{\mu} - \eta^{3} \cdot 3^{\mu} + \eta^{5} \cdot 5^{\mu} - \cdots + (-1)^{l-1} \eta^{2l-1} (2l-1)^{\mu}\right) \\ = \gamma (-1)^{l-1} \eta^{2l} (\varepsilon + 2l)^{\mu} + \gamma \varepsilon_{\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon + 2l)^{\mu} = (-1)^{l-1} \eta^{-2l} \Big(2\big(\eta \cdot 1^{\mu} - \eta^{3} \cdot 3^{\mu} + \eta^{5} 5^{\mu} - \cdots \\ + (-1)^{l-1} \eta^{2l-1} (2l-1)^{\mu}\big) - \gamma \varepsilon_{\mu}\Big). \end{aligned}$$

Setzt man statt der positiven geraden Zahl $2l$ eine Variable z, so erhält man einen Ausdruck

$$2) \qquad \underline{E_{\mu}(z, u) = \gamma(\varepsilon + z)^{\mu}},$$

der als Ultra-Eulersche Funktion (U.-E. F.) definiert werden soll. Für ganze gerade positive Werte der Variablen läßt sich also, wie obige Gleichung zeigt, die U.-E. F. $E_{2\mu}$ durch die Summe der mit entsprechenden Potenzen von η multiplizierten ungeraden Zahlen ausdrücken

$$3) \qquad \begin{aligned} E_{\mu}(2l, u) = 2(-1)^{l-1} \eta^{-2l} \times \\ \left(\eta^{1} 1^{\mu} - \eta^{3} 3^{\mu} + \cdots + (-1)^{l-1} \eta^{2l-1} (2l-1)^{\mu} - \frac{\gamma}{2} \varepsilon_{\mu}\right). \end{aligned}$$

Man kann diese U.-E. F. $E_{\mu}(z, u)$ auch noch auf andere Weise zur Darstellung bringen: es ist

$$\gamma(\varepsilon + z)^{\mu} \eta^{z} = \frac{d^{\mu}}{dy^{\mu}} \left[\gamma e^{(\varepsilon+z)y + zv}\right]_{y=0} = \frac{d^{\mu}}{dy^{\mu}} \left[\gamma e^{\varepsilon y + z(y+v)}\right]_{y=0} = \frac{d^{\mu}}{dy^{\mu}} \left[\frac{2e^{(z+1)(y+v)}}{e^{2(y+v)}+1}\right]_{y=0},$$

da nach dem Obigen $\gamma e^{\varepsilon y} = \dfrac{2e^{v+y}}{e^{2(y+v)}+1}$ ist.

„Die U.-E. F. $E_{\mu}(z, u)$ ist darstellbar als das Produkt aus η^{-z} und dem μ^{ten} Differentialquotienten der Funktion $\dfrac{2e^{(z+1)(y+v)}}{e^{2(y+v)}+1}$ nach y für $y = 0$."

Es ist ferner

$$E_\mu(z+2,u)=\eta^{-z-2}\frac{d^\mu}{dy^\mu}\left[\frac{2e^{(z+3)(y+v)}}{e^{2(y+v)}+1}\right]_{y=0}=\eta^{-z-2}\frac{d^\mu}{dy^\mu}\left[2e^{(z+1)(y+v)}-\frac{2e^{(z+1)(y+v)}}{e^{2(y+v)}+1}\right]_{y=0},$$

4) $$E_\mu(z+2,u)=2\eta^{-1}(z+1)^\mu-\eta^{-2}E_\mu(z,u).$$

Formel 4) lehrt, die Werte von $E_\mu(z,u)$ in ihrem ganzen Verlaufe zu finden, wenn man sie für ein Intervall der Variablen kennt, dessen Grenzen um 2 differieren.

Es ist ferner:

$$\frac{e^{(1-z)(v+y)}}{e^{2(v+y)}+1}=\frac{e^{-(1+z)(v+y)}e^{2(v+y)}}{e^{2(v+y)}+1}=\frac{e^{-(1+z)(v+y)}}{e^{-2(v+y)}+1}.$$

Daraus folgt

$$\gamma(\varepsilon-z)^\mu\eta^{-z}=\frac{d^\mu}{dy^\mu}\left[\frac{2e^{(1+z)(-v-y)}}{e^{2(-v-y)}+1}\right]_{y=0}=(-1)^\mu\frac{d^\mu}{dy^\mu}\left[\frac{2e^{(1+z)(y-v)}}{e^{2(y-v)}+1}\right]_{y=0}$$

oder

5) $$E_\mu(-z,u)=(-1)^\mu E_\mu(z,-u).$$

Es ist $E_\mu(z,u)=\gamma(\varepsilon+z)^\mu$, also

6) $$E_{\mu-1}(z,u)=\frac{1}{\mu}\frac{dE_\mu(z,u)}{dz};$$

7) $$E_{\mu-\nu}(z,u)=\frac{1}{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-\nu+1)}\frac{d^\nu E_\mu(z,u)}{dz^\nu}.$$

Aus 3) folgt

$$E_\mu(2l,u)\frac{(-1)^{l-1}}{2}\eta^{2l}+\frac{1}{2}\gamma\,\varepsilon_\mu=\eta^1 1^\mu-\eta^3 3^\mu+\eta^5 5^\mu-\cdots$$
$$+(-1)^{l-1}\eta^{(2l-1)}(2l-1)^\mu,$$

$$E_\mu(2l,-u)\frac{(-1)^{l-1}}{2}\eta^{-2l}+\frac{1}{2}\gamma(-u)\,\varepsilon_\mu(-u)=\eta^{-1}1^\mu-\eta^{-3}3^\mu+\eta^{-5}5^\mu-\cdots$$
$$+(-1)^{l-1}\eta^{-(2l-1)}(2l-1)^\mu.$$

Berücksichtigt man $\eta=e^{ui}$, so folgt durch Addition und Subtraktion

8) $$\begin{cases}2\left(1^\mu\cos u-3^\mu\cos 3u+5^\mu\cos 5u-\cdots+(-1)^{l-1}(2l-1)^\mu\cos(2l-1)u\right)\\ \quad=\frac{1}{2}\{\gamma\varepsilon_\mu+\gamma(-u)\,\varepsilon_\mu(-u)+(-1)^{l-1}[E_\mu(2l,u)+E_\mu(2l,-u)]\cos 2lu\\ \qquad+(-1)^{l-1}[E_\mu(2l,u)-E_\mu(2l,-u)]\,i\sin 2lu\};\\ 2i\left(1^\mu\sin u-3^\mu\sin 3u+\cdots+(-1)^{l-1}(2l-1)^\mu\sin(2l-1)u\right)\\ \quad=\frac{1}{2}\{\gamma\varepsilon_\mu-\gamma(-u)\,\varepsilon_\mu(-u)+(-1)^{l-1}[E_\mu(2l,u)-E_\mu(2l,-u)]\cos 2lu\\ \qquad+(-1)^{l+1}[E_\mu(2l,u)+E_\mu(2l,-u)]\,i\sin 2lu\}.\end{cases}$$

Durch die Gleichungen

$$E_\mu(z,u)+E_\mu(z,-u)=2E'_\mu(z,u),$$
$$E_\mu(z,u)-E_\mu(z,-u)=2E''_\mu(z,u)$$

sollen neue Gattungen von U.-E. F. aus den ursprünglichen abgeleitet und definiert werden, die vermöge 19′) in § 2 die Form haben

$$9)\begin{cases} E'_{2\mu}(z,u) = \gamma'\{\varepsilon'_{2\mu} + (2\mu)_2\,\varepsilon'_{2\mu-2}\,z^2 + (2\mu)_4\,\varepsilon'_{2\mu-4}\,z^4 + \cdots + (2\mu)_2\,\varepsilon'_2\,z^{2\mu-2} + z^{2\mu}\}, \\ E'_{2\mu+1}(z,u) = \gamma'\{(2\mu+1)_1\,\varepsilon'_{2\mu}\,z + (2\mu+1)_3\,\varepsilon'_{2\mu-2}\,z^3 + \cdots + (2\mu+1)_2\,\varepsilon'_2\,z^{2\mu-1} + z^{2\mu+1}\}, \\ E''_{2\mu}(z,u) = \gamma''\{(2\mu)_1\,\varepsilon''_{2\mu-1}\,z + (2\mu)_3\,\varepsilon''_{2\mu-3}\,z^3 + \cdots + (2\mu)_1\,\varepsilon''_1\,z^{2\mu-1}\}, \\ E''_{2\mu+1}(z,u) = \gamma''\{\varepsilon''_{2\mu+1} + (2\mu+1)_2\,\varepsilon''_{2\mu-1}\,z^2 + (2\mu+1)_4\,\varepsilon''_{2\mu-3}\,z^4 + \cdots + (2\mu+1)_1\,\varepsilon''_1\,z^{2\mu}\}. \end{cases}$$

Man kann, um sofort eine Anwendung dieser U.-E. F. zu geben, dann die oben angeführten Reihen auch in die Form bringen:

$$2\left(1^{2\mu}\cos u - 3^{2\mu}\cos 3u + \cdots + (-1)^{l-1}(2l-1)^{2\mu}\cos(2l-1)u\right)$$
$$= \gamma'\varepsilon'_{2\mu} + (-1)^{l-1}\{E'_{2\mu}(2l,u)\cos 2lu + i\,E''_{2\mu}(2l,u)\sin 2lu\},$$
$$2\left(1^{2\mu+1}\cos u - 3^{2\mu+1}\cos 3u + \cdots + (-1)^{l-1}(2l-1)^{2\mu+1}\cos(2l-1)u\right)$$
$$= (-1)^{l-1}\{E'_{2\mu+1}(2l,u)\cos 2lu + i\,E''_{2\mu+1}(2l,u)\sin 2lu\},$$
$$2i\left(1^{2\mu}\sin u - 3^{2\mu}\sin 3u + \cdots + (-1)^{l-1}(2l-1)^{2\mu}\sin(2l-1)u\right)$$
$$= (-1)^{l+1}\{E''_{2\mu}(2l,u)\cos 2lu + i\,E'_{2\mu}(2l,u)\sin 2lu\},$$
$$2i\left(1^{2\mu+1}\sin u - 3^{2\mu+1}\sin 3u + \cdots + (-1)^{l-1}(2l-1)^{2\mu+1}\sin(2l-1)u\right)$$
$$= (-1)^{l-1}\{E''_{2\mu+1}(2l,u)\cos 2lu + i\,E'_{2\mu}(2l,u)\sin 2lu\} + \gamma''\varepsilon''_{2\mu+1}.$$

Analoge Betrachtungen wie mit der Secansfunktion müssen nun für die Tangensfunktion durchgeführt werden. Es ist

$$\gamma_1 e^{\delta z} = \frac{2}{e^{z+w}+1} \qquad 2 = \gamma_1 e^{(\delta+1)z}\eta_1 + \gamma_1 e^{\delta z}.$$

Letztere Gleichung erweitere man nun nacheinander mit $1, -e^z, +e^{2z}, \ldots$ $e^{(l-1)z}(-1)^{l-1}$; durch Koeffizientenvergleichung erhält man dann das System

$$0 = (\delta+1)^\mu\gamma_1\eta_1 + \gamma_1\delta_\mu$$
$$-2\cdot 1^\mu = -\gamma_1\eta_1(\delta+2)^\mu - \gamma_1(\delta+1)^\mu$$
$$2\cdot 2^\mu = \gamma_1\eta_1(\delta+3)^\mu + \gamma_1(\delta+2)^\mu$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^{l-1}2\cdot(l-1)^\mu = (-1)^{l-1}\gamma_1\eta_1(\delta+l)^\mu + (-1)^{l-1}\gamma_1(\delta+l-1)^\mu.$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $1, \eta_1, \eta_1^2, \ldots$ η_1^{l-1} und addiert, so ergibt sich

$$2\left(-\eta_1\cdot 1^\mu + \eta_1^2\,2^\mu - \eta_1^3\,3^\mu + \cdots + (-1)^{l-1}\eta_1^{l-1}(l-1)^\mu\right)$$
$$= \gamma_1\delta_\mu + (-1)^{l-1}\gamma_1\eta_1^l(\delta+l)^\mu.$$

Nun werde eine neue Gruppe von U.-E. F. durch die Gleichung definiert:

$$10) \qquad \underline{D_\mu(z,u) = \gamma_1(\delta+z)^\mu,}$$

so erkennen wir, daß sie sich für einen ganzen positiven Wert des Argumentes durch eine Summe von Potenzen darstellen lassen:

$$11) \begin{cases} D_\mu(l,u) = 2\eta_1^{-l}(-1)^{l-1}\{-\eta_1^1\,1^\mu + \eta_1^2\,2^\mu - \eta_1^3\,3^\mu + \cdots \\ \qquad\qquad + (-1)^{l-1}\eta_1^{l-1}(l-1)^\mu - \gamma_1\delta_\mu\}. \end{cases}$$

Da nun, wie leicht einzusehen, $\gamma_1 \eta_1^z (\delta + z)^\mu = \frac{d^\mu}{d y^\mu} [\gamma_1 e^{\delta y + z(y+w)}]_{y=0}$ ist und $\gamma_1 \varepsilon^{\delta y} = \frac{2}{e^{y+w}+1}$, so folgt:

„Die U.-E. F. $D_\mu(z, u)$ kann man darstellen als das Produkt aus der Größe η_1^{-z} und dem μ^{ten} Differentialquotienten der Funktion $\frac{2e^{z(y+w)}}{e^{(y+w)}+1}$ nach y für den Wert $y = 0$."

Aus 11) folgt die weitere Gleichung

$$2\left(-\eta_1^{-1}\cdot 1^\mu + \eta_1^{-2}\cdot 2^\mu - \cdots + (-1)^{l-1}\eta_1^{-(l-1)}(l-1)^\mu\right) = \gamma_1(-u)\,\delta_\mu(-u) + (-1)^{l-1}\eta_1^{-l} D_\mu(l, -u),$$

und aus beiden durch Addition und Subtraktion, da $\eta_1 = e^{2ui}$ ist,

$$12)\quad 4\left(-1^\mu \cos 2u + 2^\mu \cos 4u - \cdots + (-1)^{l-1}(l-1)^\mu \cos 2(l-1)u\right)$$
$$= \gamma_1(-u)\,\delta_\mu(-u) + \gamma_1\delta_\mu + (-1)^{l-1}[D_\mu(l, u) + D_\mu(l, -u)]\cos 2lu + i(-1)^{l-1}[D_\mu(l, u) - D_\mu(l, -u)]\sin 2lu,$$

$$4i\left(-1^\mu \sin 2u + 2^\mu \sin 4u - \cdots + (-1)^{l-1}(l-1)^\mu \sin 2(l-1)u\right)$$
$$= \gamma_1\delta_\mu - \gamma_1(-u)\,\delta_\mu(-u) + (-1)^{l-1}[D_\mu(l,u) - D_\mu(l,-u)]\cos 2lu + i(-1)^{l-1}[D_\mu(l, u) + D_\mu(l,-u)]\sin 2lu.$$

Auch hier sollen neue U.-E. F. durch die beiden Gleichungen

$$D_\mu(z, u) + D_\mu(z, -u) = 2D'_\mu(z, u),$$
$$D_\mu(z, u) - D_\mu(z, -u) = 2D''_\mu(z, u)$$

definiert werden, die dann die Form erhalten:

$$13)\begin{cases} D'_{2\mu}(z, u) = \gamma'_1\{(2\mu)_1\delta'_{2\mu-1}z + (2\mu)_3\delta'_{2\mu-3}z^3 + \cdots + (2\mu)_1\delta'_1 z^{2\mu-1} + z^{2\mu}\}, \\ D'_{2\mu+1}(z,u) = \gamma'_1\{\delta'_{2\mu+1} + (2\mu+1)_2\delta'_{2\mu-1}z^2 + (2\mu+1)_4\delta'_{2\mu-3}z^4 + \cdots \\ \qquad + (2\mu+1)_1\delta'_1 z^{2\mu} + z^{2\mu+1}\}, \\ D''_{2\mu}(z, u) = \gamma''_1\{\delta''_{2\mu} + (2\mu)_2\delta''_{2\mu-2}z^2 + (2\mu)_4\delta''_{2\mu-4}z^4 + \cdots + (2\mu)_2\delta''_2 z^{2\mu-2} + z^{2\mu}\}, \\ D''_{2\mu+1}(z,u) = \gamma''_1\{(2\mu+1)_1\delta''_{2\mu}z + (2\mu+1)_3\delta''_{2\mu-2}z^3 + \cdots + (2\mu+1)_2\delta''_2 z^{2\mu-1} + z^{2\mu+1}\}. \end{cases}$$

Als Anwendung möge noch die Summation der obigen Reihen dienen:

$$2\left(-1^{2\mu}\cos 2u + 2^{2\mu}\cos 4u - \cdots + (-1)^{l-1}(l-1)^{2\mu}\cos 2(l-1)u\right) = (-1)^{l-1}[D'_{2\mu}(l, u)\cos 2lu + iD''_{2\mu}(l, u)\sin 2lu],$$

$$2\left(-1^{2\mu+1}\cos 2u + 2^{2\mu+1}\cos 4u - \cdots + (-1)^{l-1}(l-1)^{2\mu+1}\cos 2(l-1)u\right) = \gamma'_1\delta'_{2\mu+1} + (-1)^{l-1}[D'_{2\mu+1}(l, u)\cos 2lu + iD''_{2\mu+1}(l, u)\sin 2lu],$$

$$2\left(-1^{2\mu}\sin 2u + 2^{2\mu}\sin 4u - \cdots + (-1)^{l-1}(l-1)^{2\mu}\sin 2(l-1)u\right) = \gamma''_1\delta''_{2\mu} + (-1)^{l-1}[D''_{2\mu}(l, u)\cos 2lu + iD'_{2\mu}(l, u)\sin 2lu],$$

$$2\left(-1^{2\mu+1}\sin 2u + 2^{2\mu+1}\sin 4u - \cdots + (-1)^{l-1}(l-1)^{2\mu+1}\sin 2(l-1)u\right) = (-1)^{l-1}[D''_{2\mu+1}(l, u)\cos 2lu + iD'_{2\mu+1}(l, u)\sin 2lu].$$

Schließlich bestehen zwischen den definierten U.-E. F. und den am Ende von § 1 unter B) angeführten Fourierschen Reihen noch enge Beziehungen,

die aufzudecken den Schluß dieses Paragraphen bilden soll. Die Gruppe der Reihen B) war aus der Gruppe A) durch die Substitution $r = m - 2k$ erhalten worden. Die Reihen B) stellen also dieselben Kurvenzüge wie A) dar, nur unter der Berücksichtigung $r = m - 2k$.

I. Es stellt also $f(y) = \sum_0^\infty {}^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m-2k} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k} \right\}$

denselben Zug von konstanten Werten dar wie

$$f(y) = \frac{\cos ry}{r} + \sum_0^\infty {}^l \left(\frac{\cos(ln+r)y}{ln+r} - \frac{\cos(ln-r)y}{ln-r} \right),$$

wie gezeigt worden ist. Nun ist aber für $0 < y < \frac{2\pi}{n}$, $f(y) = \frac{2\pi}{n} f_2$[§ 1, A) I.] und nach Krause, Berichte S. 195, $f_2 = \frac{1}{2} \cot u_r = \frac{1}{2} \cot \frac{m-2k}{n} \pi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} u_k$. Durch wiederholte Integration ergibt sich

$$\sum_0^\infty {}^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\}$$
$$= (-1)^\mu \left\{ \frac{2\pi}{n} f_2 \frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!} - \overline{\tau_3^{(u_k)}} \frac{y^{2\mu-2}}{(2\mu-2)!} + \overline{\tau_5^{(u_k)}} \frac{y^{2\mu-4}}{(2\mu-4)!} - \cdots + (-1)^{\mu+1} \overline{\tau_{2\mu-1}^{(u_k)}} \frac{y^2}{2!} + (-1)^\mu \overline{\tau_{2\mu+1}^{(u_k)}} \right\},$$

$$\sum_0^\infty {}^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}} \right\}$$
$$= (-1)^\mu \left\{ \frac{2\pi}{n} f_2 \frac{y^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} - \overline{\tau_3^{(u_k)}} \frac{y^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!} + \overline{\tau_5^{(u_k)}} \frac{y^{2\mu-3}}{(2\mu-3)!} - \cdots + (-1)^{\mu-1} \overline{\tau_{2\mu-1}^{(u_k)}} \frac{y^3}{3!} + (-1)^\mu \overline{\tau_{2\mu+1}^{(u_k)}} \frac{y}{1!} \right\}.$$

Bedenkt man, daß nach § 2, 22a)

$$\overline{\tau_{2\mu+1}^{(u_k)}} = \frac{1}{2} i (-1)^\mu \frac{1}{(2\mu)!} \left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu+1} \gamma_1''(u_k) \delta_{2\mu}''(u_k) \text{ und } \gamma_1''(u_k) = -i \operatorname{tg}(u_k)$$

ist, so erhält man:

$$\sum_0^\infty {}^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\}$$
$$= \frac{(-1)^\mu}{2} i \gamma_1''(u_k) \left\{ \frac{\pi}{m} \frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!} + \left(\frac{\pi}{m}\right)^3 \frac{y^{2\mu-2}}{2!\,(2\mu-2)!} \delta_2'' + \left(\frac{\pi}{m}\right)^5 \frac{y^{2\mu-4}}{4!\,(2\mu-4)!} \delta_4'' + \cdots + \left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu-1} \frac{y^2}{(2\mu-2)!\,2!} \delta_{2\mu-2}'' + \left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu+1} \frac{\delta_{2\mu}''}{(2\mu)!} \right\},$$

$$\sum_0^\infty {}^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} (-1)^\mu i \gamma_1''(u_k) \left\{ \frac{\pi}{m} \frac{y^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} + \left(\frac{\pi}{m}\right)^3 \frac{y^{2\mu-1}}{2!\,(2\mu-1)!} \delta_2'' + \cdots + \left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu-1} \frac{y^3}{(2\mu-2)!\,3!} \delta_{2\mu-2}'' + \left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu+1} \frac{y}{(2\mu)!\,1!} \delta_{2\mu}'' \right\},$$

und es ergibt sich durch Vergleich mit Formel 13) das

Resultat: „Die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty{}_l\left\{\frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}}-\frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}}\right\}$$

und $$\sum_0^\infty{}_l\left\{\frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}}-\frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}}\right\}$$

stellen im Intervall $0\leqq y\leqq\frac{2\pi}{n}$ die resp. Funktionen dar:

$$\frac{1}{2}i(-1)^\mu\frac{1}{(2\mu)!}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu+1}D''_{2\mu}\left(\frac{my}{\pi},u_k\right)$$

und $$\frac{1}{2}i\frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu+2}D''_{2\mu+1}\left(\frac{my}{\pi},u_k\right).\text{“}$$

II. Da $$\sum_0^\infty{}_l\left\{\frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m-2k}+\frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k}\right\}$$

und $\frac{\sin ry}{r}+\sum_0^\infty{}_l\left(\frac{\sin(ln+r)y}{ln+r}+\frac{\sin(ln-r)y}{ln-r}\right)$ ebenfalls einen gleichen Zug konstanter Werte darstellen sollen, und zwar im Intervalle $0<y<\frac{2\pi}{n}$ den Wert $\frac{2\pi}{n}f_2$, wobei $\frac{1}{2}=f_2$ [§ 1, A) Ib)], so ergibt sich durch Integration

$$\sum_0^\infty{}_l\left\{\frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}}+\frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}}\right\}$$

$$=(-1)^\mu\left\{\frac{\pi}{n}\frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}-\overline{T_2^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}+\overline{T_4^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu-3}}{(2\mu-3)!}+\cdots+(-1)^\mu\overline{T_{2\mu}^{(u_k)}}\frac{y}{1!}\right\},$$

$$\sum_0^\infty{}_l\left\{\frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}}+\frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}}\right\}=(-1)^{\mu+1}\left\{\frac{\pi}{n}\frac{y^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}\right.$$

$$\left.-\overline{T_2^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}+\overline{T_4^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu-2}}{(2\mu-2)!}-\cdots+(-1)^\mu\overline{T_{2\mu}^{(u_k)}}\frac{y^2}{2!}+(-1)^{\mu+1}\overline{T_{2\mu+2}^{(u_k)}}\right\}.$$

Da nun $\overline{T_{2\mu}^{(u_k)}}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^\mu}{(2\mu-1)!}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu}\gamma'_1(u_k)\,\delta'_{2\mu-1}(u_k)$ und $\gamma'_1=1$ ist, so ergibt sich das

Resultat: „Die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty{}_l\left\{\frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}}+\frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}}\right\},$$

resp. $$\sum_0^\infty{}_l\left\{\frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}}+\frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}}\right\}$$

stellen für $0\leqq y\leqq 2\frac{\pi}{n}$ die Funktionen dar:

$$\frac{1}{2}(-1)^\mu\frac{1}{(2\mu)!}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu+1}D'_{2\mu}\left(\frac{my}{\pi},u_k\right),\text{ resp. }\frac{1}{2}\frac{(-1)^{\mu+1}}{(2\mu+1)!}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{2\mu+2}D'_{2\mu+1}\left(\frac{my}{\pi},u_k\right).\text{“}$$

III. Da weiter $\sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m-2k} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k} \right\}$ denselben Zug von Konstanten darstellt wie

$$\frac{\cos ry}{r} + \sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\cos(ln+r)y}{ln+r} - \frac{\cos(ln-r)y}{ln-r} \right\},$$

und zwar für $0 < y < \frac{\pi}{n}$ den Wert $\frac{2\pi}{n} f_1$, wobei (Krause)

$$f_1 = \frac{1}{2\sin u_r} = \frac{1}{2}\sec u_k$$

ist, so folgt durch Integration

$$\sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\}$$
$$= (-1)^\mu \left\{ \frac{2\pi}{n} f_1 \frac{y^{2\mu}}{2\mu!} - \overline{T_3^{(u_k)}} \frac{y^{2\mu-2}}{(2\mu-2)!} + \overline{T_5^{(u_k)}} \frac{y^{2\mu-4}}{(2\mu-4)!} - \cdots + (-1)^{\mu+1} \overline{T_{2\mu-1}^{(u_k)}} \frac{y^2}{2!} + (-1)^\mu \overline{T_{2\mu+1}^{(u_k)}} \right\},$$

$$\sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} + \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}} \right\}$$
$$= (-1)^\mu \left\{ \frac{2\pi}{n} f_1 \frac{y^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} - \overline{T_3^{(u_k)}} \frac{y^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!} + \cdots + (-1)^{\mu+1} \overline{T_{2\mu-1}^{(u_k)}} \frac{y^3}{3!} + (-1)^\mu \overline{T_{2\mu+1}^{(u_k)}} \frac{y}{1!} \right\},$$

und da $\overline{T_{2\mu+1}^{(u_k)}} = \frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1} \gamma'(u_k)\, \varepsilon'_{2\mu}(u_k)$, $\gamma'(u_k) = \sec u_k = 2f_1$ ist, das

Resultat: „Die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}} \right\},$$

$$\text{resp. } \sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} + \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}} \right\}$$

stellen für $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{n}$ die Funktionen dar:

$$\frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1} E'_{2\mu}\left(\frac{ny}{\pi}, u_k\right), \text{ resp. } \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+2} E'_{2\mu+1}\left(\frac{ny}{\pi}, u_k\right).\text{“}$$

IV. Da schließlich $\sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m-2k} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k} \right\}$

und $\frac{\sin ry}{r} + \sum_0^\infty (-1)^l \left\{ \frac{\sin(ln+r)y}{ln+r} + \frac{\sin(ln-r)y}{ln-r} \right\}$ ebenfalls denselben Konstantenzug darstellen, und zwar für $0 < y < \frac{\pi}{n} : \frac{2\pi}{n} f_1$, wobei $f_1 = 0$ ist, [§ 1, A., II b)], so erhält man hier

$$\sum_0^\infty (-1)^l\left\{\frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}}-\frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}}\right\}$$

$$=(-1)^{\mu+1}\left\{\overline{t_2^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}-\overline{t_4^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu-3}}{(2\mu-3)!}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^\mu\overline{t_{2\mu-2}^{(u_k)}}\frac{y^3}{3!}+(-1)^{\mu+1}\overline{t_{2\mu}^{(u_k)}}\frac{y}{1!}\right\},$$

$$\sum_0^\infty (-1)^l\left\{\frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}}-\frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}}\right\}$$

$$=(-1)^\mu\left\{\overline{t_2^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}-\overline{t_4^{(u_k)}}\frac{y^{2\mu-2}}{(2\mu-2)!}+\cdots+(-1)^{\mu+1}\overline{t_{2\mu}^{(u_k)}}\frac{y^2}{2!}+(-1)^\mu\overline{t_{2\mu+2}^{(u_k)}}\right\},$$

und da $\overline{t_{2\mu}^{(u_k)}}=i\frac{(-1)^{\mu+1}}{(2\mu-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu}\gamma''(u_k)\,\varepsilon_{2\mu-1}''(u_k)$ ist, das

Resultat: „Die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty (-1)^l\left\{\frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+1}}-\frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+1}}\right\},$$

$$\text{resp. }\sum_0^\infty (-1)^l\left\{\frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}}-\frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}}\right\}$$

stellen für $0\leqq y\leqq\frac{\pi}{n}$ die Funktionen dar:

$$i\frac{(-1)^{\mu+1}}{(2\mu)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1}E_{2\mu}''\left(\frac{ny}{\pi},u_k\right),\ \text{resp. } i\frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+2}E_{2\mu+1}''\left(\frac{ny}{\pi},u_k\right).\text{“}$$

Aus den soeben gewonnenen vier Resultaten folgt aber sofort und leicht eine Diskussion des Verlaufes der U.-E. F. Es ist nämlich, sobald $r=m-2k$ ist,

$$\left.\begin{aligned} D_{2\mu}''\left(\frac{ny}{2\pi},u_k\right)&=B_{2\mu}'\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right), & D_{2\mu+1}''\left(\frac{ny}{2\pi},u_k\right)&=B_{2\mu+1}'\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right),\\ D_{2\mu}'\left(\frac{ny}{2\pi},u_k\right)&=-B_{2\mu}''\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right), & D_{2\mu+1}'\left(\frac{ny}{2\pi},u_k\right)&=-B_{2\mu+1}''\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right),\end{aligned}\right\}\ 0\leqq y\leqq 2\frac{\pi}{n};$$

$$\left.\begin{aligned} E_{2\mu}'\left(\frac{ny}{\pi},u_k\right)&=iA_{2\mu}'\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right), & E_{2\mu+1}'\left(\frac{ny}{\pi},u_k\right)&=iA_{2\mu+1}'\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right),\\ E_{2\mu}''\left(\frac{ny}{\pi},u_k\right)&=-iA_{2\mu}''\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right), & E_{2\mu+1}''\left(\frac{ny}{\pi},u_k\right)&=-iA_{2\mu+1}''\left(\frac{ny}{2\pi},u_r\right),\end{aligned}\right\}\ 0\leqq y\leqq\frac{\pi}{n}.$$

Dann ergibt sich aber aus den Untersuchungen über den Verlauf der U.-B. F. § 1, Ende:

$(-1)^\mu i\,\underline{D_{2\mu}''(z,u_k)}$ ist für $0\leqq z\leqq 1$;
für $k=0$; konstant $=0$;
$0<2k<\frac{m}{2}$ vom Maximum ausgehend erst positiv, dann durch 0, negativ;
$\frac{m}{2}<2k<m$ „ „ „ stets positiv.

$(-1)^\mu i\,\underline{D_{2\mu+1}''(z,u_k)}$ ist für $0\leqq z\leqq 1$; und
für $k=0$; beständig $=0$;

$0 < 2k < \frac{m}{2}$ von 0 beständig bis zu einem Maximum steigend, dann fallend, stets positiv;

$\frac{m}{2} < 2k < m$ von 0 beständig positiv steigend.

$\underline{(-1)^\mu D'_{2\mu}(z, u_k)}$ $0 \leqq z \leqq 1$ ist für

$k = 0$ von 0 aus steigend bis zu einem Maximum, dann bis zu 0 fallend;

$0 < 2k < \frac{m}{2}$ von 0 bis zu einem Maximum steigend, dann stets positiv fallend;

$\frac{m}{2} < 2k < m$ beständig von 0 an steigend.

$\underline{(-1)^{\mu+1} D'_{2\mu+1}(z, u_k)}$ $0 \leqq z \leqq 1$ beginnt mit einem Maximalwerte;

$k = 0$, fällt bis 0, fällt negativ bis zu einem Minimum;

$0 < 2k < \frac{m}{2}$ „ „ 0, dann negativ, ohne das Minimum zu erreichen.

$\frac{m}{2} < 2k < m$ „ stets positiv.

$\underline{(-1)^\mu E'_{2\mu}(z, u_k)}$ $0 \leqq z \leqq 1$ beginnt positiv mit einem Maximum und bleibt positiv für alle Werte $m > 2k > 0$ und erreicht für $z = 1$ und $k = 0$ den Wert 0. $\underline{(-1)^\mu E'_{2\mu+1}(z, u_k)}$ beginnt mit 0, bleibt positiv steigend für $0 \leqq z \leqq 1$, für $0 < 2k < m$; das Maximum wird erreicht für $k = 0$ und $z = 1$.

Spezialfall:

$$E'_{2\mu}(z, 0) = E_{2\mu}(z) \qquad E'_{2\mu+1}(z, 0) = E_{2\mu+1}(z). \qquad \text{Rogel.}$$

$\underline{(-1)^{\mu+1} i E''_{2\mu}(z, u_k)}$ fängt im Nullpunkte an, um für $0 \leqq z \leqq 1$ und $0 < 2k < m$ positiv zu steigen, für $k = 0$ ist es konstant $= 0$. $\underline{(-1)^\mu i E''_{2\mu+1}(z, u_k)}$ fängt für $0 < 2k < m$ mit einem Maximum an und fällt für $0 \leqq z \leqq 1$ stets positiv, für $k = 0$ ist es konstant $= 0$.

Erwähnt sei noch, daß die Darstellung der U.-B. F. und U.-E. F. durch die trigonometrischen Reihen auch ein einfaches Mittel bietet, um Rekursionsformeln zwischen den U.-B. Z. und U.-E. Z. aufzustellen. Es ist nämlich

$$B'_{2\mu}(1, u_r) = c'\left(b'_{2\mu} + (2\mu)_2 b'_{2\mu-2} + (2\mu)_4 b'_{2\mu-4} + \cdots + 1\right)$$

$$= (-1)^\mu \cdot (2\mu)! \frac{2}{i}\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{2\mu+1} \cos 2u_r \left(\frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right)\right)$$

$= c' b'_{2\mu} \cos 2u_r$, also

$$\left.\begin{aligned} &a b'_{2\mu} + (2\mu)_2 b'_{2\mu-2} + (2\mu)_4 b'_{2\mu-4} + \cdots + 1 = 0; \\ &\text{ebenso} \\ &a b''_{2\mu+1} + (2\mu+1)_2 b''_{2\mu-1} + (2\mu+1)_4 b''_{2\mu-3} + \cdots + (2\mu+1)_1 b''_1 + 1 = 0 \end{aligned}\right\} a = 2\sin^2 u_r.$$

Aus dem Vergleiche zwischen den beiden Darstellungen von $D_{2\mu+1}(1, u)$ und $D''_{2\mu}(1, u)$, einerseits durch die trigonometrischen Reihen, anderseits als rationale Funktionen, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &a_1 \delta'_{2\mu+1} + (2\mu+1)_2 \delta'_{2\mu-1} + (2\mu+1)_4 \delta'_{2\mu-3} + \cdots + (2\mu+1)_1 \delta'_1 + 1 = 0 \\ &a_1 \delta''_{2\mu} + (2\mu)_2 \delta''_{2\mu-2} + (2\mu)_4 \delta''_{2\mu-4} + \cdots + 1 = 0 \end{aligned}\right\} a_1 = 2\cos^2\frac{k}{m}\pi.$$

Ähnlich könnte man Rekursionsformeln für a'_{2k}, a''_{2k} (Krause)* und ε'_{2k}, ε''_{2k+1} aufstellen; doch sind für das Folgende nur die obigen von Wert. Es ergibt sich aus ihnen:

$$b'_2 = -\frac{1}{a}, \quad b'_4 = -\frac{1}{a} + \frac{6}{a^2}, \quad b'_6 = -\frac{1}{a} + \frac{30}{a^2} - \frac{90}{a^3},$$

$$b'_8 = -\frac{1}{a} + \frac{126}{a^2} - \frac{1260}{a^3} + \frac{2520}{a^4}, \quad b'_{10} = -\frac{1}{a} + \frac{510}{a^2} - \frac{18230}{a^3} + \frac{75600}{a^4} - \frac{113400}{a^5},$$

$$b'_{12} = -\frac{1}{a} + \frac{2046}{a^2} - \frac{126720}{a^3} + \frac{1580040}{a^4} - \frac{6237000}{a^5} + \frac{7484400}{a^6},$$

$$b'_{14} = -\frac{1}{a} + \frac{8190}{a^2} - \frac{1171170}{a^3} + \frac{28828800}{a^4} - \frac{227026800}{a^5} + \frac{681080400}{a^6} - \frac{681080400}{a^7}.$$

Setzt man hier für a: a_1, so ergeben sich die U.-E. Z. $\delta''_{2\mu}$.

$$b''_1 = -\frac{1}{a}, \quad b''_3 = -\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2}, \quad b''_5 = -\frac{1}{a} + \frac{15}{a^2} - \frac{30}{a^3},$$

$$b''_7 = -\frac{1}{a} + \frac{63}{a^2} - \frac{420}{a^3} + \frac{630}{a^4}, \quad b''_9 = -\frac{1}{a} + \frac{255}{a^2} - \frac{4410}{a^3} + \frac{18900}{a^4} - \frac{22680}{a^5},$$

$$b_{11} = -\frac{1}{a} + \frac{1023}{a^2} - \frac{42240}{a^3} + \frac{395010}{a^4} - \frac{1247400}{a^5} + \frac{1247400}{a^6};$$

a_1 für a gesetzt, ergibt die U.-E. Z.: $\delta'_{2\mu+1}$.

Die abgeleiteten Rekursionsformeln gelten, wie man sich leicht überzeugen kann, auch für den allgemeineren Fall, daß $a = 2\sin^2 u$, $a_1 = 2\cos^2 u$ ist, wobei u nicht mehr ein rationaler Bruch von π zu sein braucht.

Zweites Kapitel.

Anwendung der U.-B. Z. und U.-E. Z. auf die Summation von unendlichen Reihen.

Abschnitt A.

Summation von Reihen mit Hilfe der Euler-Maclaurinschen Summenformel.

Wie schon in der Einleitung erwähnt ist, bietet die Euler-Maclaurinsche Summenformel eine Möglichkeit, Reihen in zum Teil divergente Reihen zu transformieren, die jedoch eine überaus schnelle und genaue Summierung gestatten, besonders in den Fällen, wo die ursprüngliche Reihe nur schwach konvergiert. Verschärft wird die Genauigkeit der numerischen Auswertung gewöhnlich noch, wenn man nicht die ganze Reihe $\sum_{0}^{\infty} {}_k f(k)$

* Siehe [25]; über andere Rekursionsformeln vgl. auch [31].

transformiert, sondern erst einige Glieder $\sum_{0}^{a-1}{}_k f(k)$ besonders berechnet und auf die übrigen $\sum_{a}^{\infty}{}_k f(k)$ die Summenformel anwendet. Es soll nun an der Hand einiger Beispiele gezeigt werden, daß bei einer derartigen Transformation gewisser unendlicher Reihen die U.-B. Z. und U.-E. Z. auftreten und also hier eine praktische Verwendung finden.

I. Vorgelegt sei die Funktion

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^3}{1+q^6} + \cdots \quad \text{Jacobi}^{33)} \quad 0 < q < 1$$

Schreibt man $f(x) = \frac{2}{q^x + q^{-x}}$, so kann man auch setzen

$$\frac{K}{\pi} = \frac{1}{2} + \sum_{0}^{\infty}{}_k f(k);$$

auf sie soll die Eulersche Summenformel angewandt werden

$$1)\left\{\begin{aligned} & h\{f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a + \overline{q-1}h) + f(a+qh)\} \qquad qh = b \\ & = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + V + P_{2n}, \\ & V = B_1 \frac{h^2}{2!}\big(f'(b) - f'(a)\big) - B_3 \frac{h^4}{4!}\big(f'''(b) - f'''(a)\big) + \cdots \\ & \qquad + (-1)^n B_{2n-3} \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}\big(f^{(2n-3)}(b) - f^{(2n-3)}(a)\big). \end{aligned}\right.$$

Nun soll die Reihe zerlegt werden:

$$\frac{K}{\pi} = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{a-1}{}_k \frac{2}{q^k + q^{-k}} + \sum_{a}^{\infty}{}_k \frac{2}{q^k + q^{-k}},$$

und die Summenformel auf die Reihe $\sum_{a}^{\infty}{}_k \frac{2}{q^k + q^{-k}}$ Anwendung finden. Dann ist, wenn man in 1) $h = 1$, $b = \infty$ setzt,

$$\sum_{a}^{\infty}{}_k = \int_a^{\infty} \frac{2\,dx}{q^x + q^{-x}} + \frac{1}{2}\big(f(a) + f(\infty)\big) - \frac{B_1}{2!}\big(f'(a) - f'(\infty)\big)$$

$$+ \frac{B_3}{4!}\big(f'''(a) - f'''(\infty)\big) + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}\big(f^{(2n-3)}(a) - f^{(2n-3)}(\infty)\big) + P_{2n},$$

$$\int_a^{\infty} \frac{2\,dx}{q^x + q^{-x}} = \frac{2}{\lg q}\big[\operatorname{arctg} q^x\big]_a^{\infty} = -\frac{2 \operatorname{arctg} q^a}{\lg q}, \qquad 0 < \operatorname{arctg} q^a < \frac{\pi}{2},$$

$f^{(k)}(\infty) = 0$, wie gezeigt werden soll:

$$f'(x) = 2 \lg q \left(\frac{1}{q^x + q^{-x}} - \frac{2q^x}{(q^x + q^{-x})^2}\right),$$

wie man leicht erkennt;

$$f''(x) = 2(\lg q)^2 \left(\frac{1}{q^x + q^{-x}} - \frac{8}{(q^x + q^{-x})^3}\right).$$

Da nun

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(q^x+q^{-x})^m}\right) = m\cdot\lg q\left(\frac{1}{(q^x+q^{-x})^m} - \frac{2q^x}{(q^x+q^{-x})^{m+1}}\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{q^x}{(q^x+q^{-x})^n}\right) = \lg q\left(\frac{\beta q^x}{(q^x+q^{-x})^n} + \frac{\gamma}{(q^x+q^{-x})^{n+1}}\right)$$

ist, also stets wieder Glieder von der Form $\frac{\beta q^x}{(q^x+q^{-x})^m}$ und $\frac{\gamma}{(q^x+q^{-x})^n}$ auftreten, so erkennt man leicht durch fortgesetzte Anwendung vorstehender Formeln, daß

$$f^{(k)}(x) = 2(\lg q)^k\left(\frac{1}{q^x+q^{-x}} + \frac{\alpha_1 q^x}{(q^x+q^{-x})^2} + \frac{\alpha_2}{(q^x+q^{-x})^3} + \frac{\alpha_3 q^x}{(q^x+q^{-x})^4} + \cdots + \frac{\alpha_k((1+q^x)+(-1)^k(1-q^x))}{2(q^x+q^{-x})^{k+1}}\right),$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ endliche Größen sind. Setzt man hier $x=\infty$, so wird $q^x=0$, der Nenner jedes Bruches unendlich groß, da $q^{-x}=\infty$ ist, also verschwindet jeder einzelne Bruch, und daher auch $f^{(k)}(x)$, das aus einer endlichen Anzahl von derartigen Brüchen besteht. Ferner ist

$$f^{(2k-1)}(a) = \frac{d^{(2k-1)}}{dx^{2k-1}}\left(\frac{2}{q^x+q^{-x}}\right)_{x=a} = \frac{d^{(2k-1)}}{dx^{2k-1}}\left(\frac{2}{e^{x\lg q}+e^{-x\lg q}}\right)_{x=a}$$

$$= (\lg q)^{2k-1}\frac{d^{2k-1}}{dy^{2k-1}}\left(\frac{2}{q^y+q^{-y}}\right)_{y=a\lg q} = (\lg q)^{2k-1}\cdot\gamma(a\lg q)\,\varepsilon_{2k-1}(a\lg q),$$

(Siehe S. 25.)

$$f^{(2k-1)}(a) = (\lg q)^{2k-1}\cdot\gamma\cdot\varepsilon_{2k-1},\qquad \gamma = \frac{2}{q^a+q^{-a}}.$$

Die Differentialquotienten sind also die U.-E. Z. im Punkte $a\lg q$, so daß die Reihe die Gestalt annimmt:

$$\sum_a^\infty{}_k \frac{2}{q^k+q^{-k}} = -2\frac{\operatorname{arctg} q^a}{\lg q} + \frac{2}{q^a+q^{-a}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{B_1}{2!}\varepsilon_1\cdot\lg q + \frac{B_3}{4!}\varepsilon_3\cdot(\lg q)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)!}\varepsilon_{2n-3}\cdot(\lg q)^{2n-3}\right\} + P_{2n}.$$

Der Rest, den die Entwickelung annimmt, wenn hier abgebrochen wird, hat die Form

$$P_{2n} = -\frac{1}{(2n)!}\int_0^1 \varphi(t,2n)\{f^{(2n)}(a+t)+f^{(2n)}(a+1+t)+f^{(2n)}(a+2+t)+\cdots\}dt;$$

denn in der Eulerschen Summenformel hat er den Wert

2) $$P_{2n} = -\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi(t,2n)\sum_0^{q-1}{}_k f^{(2n)}(a+kh+ht)\,dt.$$

Gelingt es, $U_{2n}(t) = \sum_0^{q-1}{}_k f^{(2n)}(a+kh+ht)$ in Grenzen M und N einzuschließen, so daß $M < U_{2n} < N$ ist, so kann man auch schreiben

$$P_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}h^{2n+1}}{(2n)!}B_{2n-1}\big(M+\vartheta(N-M)\big)\qquad 0<\vartheta<1.^*$$

* Schlömilch: Höhere Analysis Bd. II S. 230 3. Aufl. 1879. — Saalschütz: Vorlesungen über Bernoullische Zahlen, 1893.

Es soll nun versucht werden, für $\sum_0^\infty {}_k f^{(2n)}(a+k+t)$ derartige Grenzen zu finden.

Schlömilch führt S. 143 des vorige Seite, unten zitierten Buches die Formel an:
$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}{e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi}}=\frac{1\sin x}{1^2+\lambda^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2+\lambda^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2+\lambda^2}-\cdots$$

Man setze $x=\frac{\pi}{2}$ und erhält für $\frac{\lambda\pi}{2}=x\lg q$, $\lambda=\frac{2x\lg q}{\pi}$,
$$\frac{\pi}{4}f(x)=\frac{1}{1^2+\left(\frac{2x\lg q}{\pi}\right)^2}-\frac{3}{3^2+\left(\frac{2x\lg q}{\pi}\right)^2}+\frac{5}{5^2+\left(\frac{2x\lg q}{\pi}\right)^2}-\cdots$$
$$f(x)=4\left\{\frac{\pi}{\pi^2+(2x\lg q)^2}-\frac{3\pi}{(3\pi)^2+(2x\lg q)^2}+\frac{5\pi}{(5\pi)^2+(2x\lg q)^2}-\cdots\right\}.$$

Nun ist aber (**Schlömilch**, Höhere Anal. Bd. I. 3. Aufl. 1868, S. 273)
$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\beta x)^2}\right)=(-1)^m m!\,\beta^m\frac{\sin\left[(m+1)\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta x}\right]}{[\alpha^2+(\beta x)^2]^{\frac{1}{2}(m+1)}}.$$

Dies auf $f(x)$ angewendet, gibt
$$f^{(2n)}(x)=4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2x\lg q}\right]}{[\pi^2+(2x\lg q)^2]^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{\sin\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{3\pi}{2x\lg q}\right]}{[9\pi^2+(2x\lg q)^2]^{n+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}.$$

Da $-1\leqq\sin\alpha\leqq+1$ ist, so kann man die Ungleichung schreiben
$$|f^{(2n)}(x)|\leqq 4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\left\{\frac{1}{[\pi^2+(2x\lg q)^2]^{n+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{[9\pi^2+(2x\lg q)^2]^{n+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}$$
$$<4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\left\{\frac{1}{[\pi^2+(2x\lg q)^2]^{n-r}}+\frac{1}{[(3\pi)^2+(2x\lg q)^2]^{n-r}}+\cdots\right\}\frac{1}{[\pi^2+(2x\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}},$$
wobei r eine noch näher zu bestimmende ganze Zahl sein soll. Die letzte Ungleichung ist richtig, da $[(s\pi)^2+(2x\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}>[\pi^2+(2x\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}$ ist. Da nun $(s\pi)^2+(2x\lg q)^2>(s\pi)^2$ ist, so kann man weiter setzen
$$|f^{(2n)}(x)|<\frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\cdot\sigma_{2(n-r)}}{[\pi^2+(2x\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}\pi^{2(n-r)}},\text{ wobei }\sigma_k=\frac{1}{1^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+\cdots$$
bedeutet. Dann gilt aber auch die folgende Ungleichung
$$|U_{2n}(t)|<\frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\cdot\sigma_{2(n-r)}}{\pi^{2(n-r)}}\left\{\frac{1}{[\pi^2+(2(a+t)\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{[\pi^2+(2(a+1+t)\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}$$
$$<\frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\cdot\sigma_{2(n-r)}}{\pi^{2(n-r)}}\left\{\frac{1}{[\pi^2+(2a\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{[\pi^2+(2(a+1)\lg q)^2]^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}.$$

Es sei nun für das Folgende nur der Fall in Betracht gezogen, daß $\lg q$ nicht viel von 0 verschieden ist, daß es wenigstens kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$, so daß wir den Ansatz machen können

$$|2(\mu-1)\lg q| < \pi < |2\mu \lg q|,$$

wodurch die ganze Zahl μ bestimmt ist. Dann ist sicher

$$|U_{2n}(t)| < \frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\cdot\sigma_{2(n-r)}}{\pi^{2n+1}}\left\{\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a+1}{\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a+2}{\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}.$$

Führt man ferner eine ganze Zahl $\lambda > 0$ durch die Ungleichung ein $(\lambda-1) < \left(\frac{a}{\mu}\right)^2 < \lambda$, faßt μ aufeinander folgende Glieder zusammen, so ist, da $1+\left(\frac{a+\mu}{\mu}\right)^2 = 1+\left(\frac{a}{\mu}\right)^2 + 2\frac{a}{\mu}+1 > 1+\lambda$ ist,

$$|U_{2n}(t)| < \frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\sigma_{2(n-r)}\,s_{r+\frac{1}{2}}\cdot\mu}{\pi^{2n+1}\,\lambda^{r-\frac{1}{2}}};$$

denn es ist

$$\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a}{\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\left[1+\left(\frac{a+1}{\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots < \mu\left\{\frac{1}{\lambda^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(\lambda+1)^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\},$$

und durch Zusammenfassen von je λ Gliedern

$$< \frac{\mu\lambda}{\lambda^{r+\frac{1}{2}}}\left\{\frac{1}{1^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\};$$

dabei soll sein $s_k = \frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots$

Nun haben wir die Größe $U_{2n}(t)$ in Grenzen eingeschlossen; denn es ist

$$-\frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\,\sigma_{2(n-r)}\,s_{r+\frac{1}{2}}\cdot\mu}{\pi^{2n+1}\,\lambda^{r-\frac{1}{2}}} < U_{2n}(t) < +\frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\,\sigma_{2(n-r)}\,s_{r+\frac{1}{2}}\cdot\mu}{\pi^{2n+1}\,\lambda^{r-\frac{1}{2}}};$$

daher ist

$$P_{2n} = \varrho\cdot\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}\cdot\frac{4\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\,\sigma_{2(n-r)}\,s_{r+\frac{1}{2}}\cdot\mu}{\pi^{2n+1}\,\lambda^{r-\frac{1}{2}}}\qquad -1<\varrho<+1.$$

Da nun (Raabe, Bernoullische Funktionen, Crelles J. XLII)

$$B_{2r-1} = (2r)!\,\frac{2}{(2\pi)^{2r}}\cdot s_{2r}$$

ist, so erhält man folgende Restdarstellung:

$$P_{2n} = \varrho\cdot\frac{8\cdot(2n)!\,(2\lg q)^{2n}\cdot\mu\cdot s_{2n}\cdot s_{r+\frac{1}{2}}\,\sigma_{2(n-r)}}{(2\pi)^{2n}\,\pi^{2n+1}\,\lambda^{r-\frac{1}{2}}},$$

die noch näher diskutiert werden soll. Da $\lambda > \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2$ und $\left|\frac{2\lg q}{\pi}\right| < \frac{1}{\mu-1}$ ist, so besteht sicher die Ungleichung:

$$P_{2n} < \frac{8\cdot(2n)!\,\mu^{2r}\,s_{2n}\,s_{r+\frac{1}{2}}\,\sigma_{2(n-r)}}{2^{2n}\pi^{2n+1}\,(\mu-1)^{2n}\,a^{2r-1}}.$$

Ferner ist r willkürlich, nur der Bedingung unterworfen $r \leqq n-1$, da andernfalls $\sigma_{2(n-r)}$ jeden Sinn verlieren würde; man wird also, sobald $a > \mu$ ist, r zweckmäßig möglichst groß wählen, um P_{2n} möglichst klein zu erhalten, also $r = n-1$. Da schließlich die Größen s_k und σ_k nur wenig von 1 verschieden sind und sich der Einheit um so mehr nähern, je mehr k wächst, so wird es sicher erlaubt sein, $s_k = 1$, $\sigma_k = 1$ zu setzen (Bourguet[12]), ohne daß die Ungleichheit falsch wird, da wir ja bei Abschätzung des Restgliedes zu weite Grenzen gezogen haben. Dann ist also

$$P_{2n} < \frac{(2n)!\,\mu^{2n-2}}{2^{2n-3}\,\pi^{2n+1}(\mu-1)^{2n}\,a^{2n-3}}.$$

Um die Frage zu erledigen, für welchen Wert von n der Fehler, den man begeht, wenn man für die ursprüngliche Reihe die transformierte setzt, am kleinsten wird, d. h. wie viele Glieder der Eulerschen Summenformel man zur Summation benutzen soll, schreibe man

$$P_{2n} < \frac{8a^3}{\mu^2\pi}\cdot(2n)!\left(\frac{\mu}{2\pi a(\mu-1)}\right)^{2n}.$$

Der erste Bruch der rechten Seite ist von n unabhängig; man erkennt leicht, daß $(2n)!\left(\frac{\mu}{2\pi a(\mu-1)}\right)^{2n}$ am kleinsten wird für die gerade Zahl $2n$, die der irrationalen Zahl $\frac{2\pi a(\mu-1)}{\mu}$ am nächsten liegt. Es sei $\left[\frac{\pi a(\mu-1)}{\mu}\right]$ die $\frac{\pi a(\mu-1)}{\mu}$ am nächsten gelegene ganze Zahl; dann ist also

$$n = \left[\frac{\pi a(\mu-1)}{\mu}\right].$$

Man sieht, daß, je näher q der Einheit kommt, um so größer also μ wird, der Einfluß von q auf die Anzahl der im günstigsten Falle zu berücksichtigenden Glieder immer geringer wird, daß aber für diese und die Größe des Restes die Anzahl a der gesondert berechneten Glieder von Einfluß ist, da a als Faktor in n, und die $2n^{\text{te}}$ Potenz von a im Nenner von P_{2n} vorkommt.

Ein Beispiel möge dies erläutern: Es sei $\lg q = -0{,}75$, also $q = e^{-0{,}75} = 0{,}4723665$; die fünf ersten Glieder von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{q^k+q^{-k}}$ sollen getrennt addiert werden, also $a = 6$; dann ist, wie man sich leicht aus dem Obigen überzeugt, $\mu = 3$, $n = 12$.

Es ergibt sich durch Rechnung

$$\frac{1}{2}+\frac{2q}{1+q^2}+\frac{2q^2}{1+q^4}+\frac{2q^3}{1+q^6}+\frac{2q^4}{1+q^8}+\frac{2q^5}{1+q^{10}} =$$

$$0{,}5 + 2\{0{,}3861951 + 0{,}2120592 + 0{,}1042412 + 0{,}0496640 + 0{,}0235047\}$$
$$= 2{,}0513284$$

$$2\frac{\operatorname{arctg} q^h}{\lg q} = 0{,}0296228.$$

Aus S. 27 ergibt sich, da $a = \frac{q^6 - q^{-6}}{q^6+q^{-6}} = 0{,}99975321$ ist,

$\varepsilon_1 = 0{,}99975321$, $\varepsilon_3 = 0{,}996792$, $\varepsilon_5 = 0{,}97020$, $\varepsilon_7 = 0{,}7311$, $\varepsilon_9 = -1{,}43$; also

$$\sum_a^\infty{}_k \frac{2}{q^k+q^{-k}} = -2\,\frac{\operatorname{arctg} q^a}{\lg q} + \frac{2}{q^a+q^{-a}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{B_1 s_1}{2!}\cdot\frac{3}{4} + \frac{B_3 s_3}{4!}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \cdots\right\}$$

$$= -0{,}0296228 + 2\cdot 0{,}0111075\{0{,}5 + 0{,}06248458 - 0{,}00058406 + 0{,}00000761 - 0{,}00000008 - 0{,}00000000\ldots\}$$

$$= -0{,}0296228 + 0{,}0421056,$$

also
$$\frac{K}{\pi} = 2{,}0638112.$$

Bei einer Genauigkeit von sieben Dezimalstellen kann man sich also mit den vier ersten Gliedern bei der Berechnung begnügen; denn die Genauigkeit, die überhaupt bei diesem Beispiele möglich ist, findet man aus $P_{2n} = P_{24} = 0{,}0000000096$, also die oberste Grenze der Genauigkeit sind in diesem Falle acht Stellen, wobei elf Glieder berechnet werden müßten Um P_{2n} zu finden, kann man näherungsweise setzen $s_k = 1$ $\sigma_k = 1$, eine Annahme, die besonders bei großem k sehr genau ist und sicher durch die zu weiten Grenzen aufgewogen wird, die wir bei Bestimmung von P_{2n} zogen. Hätte man $a = 10$ gewählt, so hätte man das Resultat auf 15 Dezimalen genau erhalten können, allerdings unter Berücksichtigung von 20 Gliedern. Für $a = 6$ und $\lg q = -0{,}01$ wäre das Resultat bei 17 Gliedern auf 17 Dezimalstellen genau.

Besonders bei größerem a und Werten von q, die nahe an 1 liegen, fallen die Glieder der Eulerschen Summenformel anfangs sehr schnell, um dann in der Nähe des kleinsten einander ziemlich gleich zu bleiben; man wird daher zweckmäßigerweise sie nur so weit benutzen, als sie schnell konvergieren, und sich mit der dabei erreichten Genauigkeit, die allerdings der überhaupt erreichbaren ganz nahe kommt, begnügen, was gewöhnlich mit einer bedeutend kleineren Anzahl von Gliedern möglich ist.

II. Aus der Eulerschen Summenformel leitet sich leicht folgende ab:*

$$2\{f(1) - f(3) + f(5) - \cdots\} = f(\infty) + f(1) + \frac{E_1}{1!}\bigl(f'(\infty) - f'(1)\bigr) - \frac{E_3}{3!}\bigl(f'''(\infty) - f'''(1)\bigr) + \frac{E_5}{5!}\bigl(f^{(5)}(\infty) - f^{(5)}(1)\bigr) - \cdots + \frac{(-1)^n E_{2n-3}}{(2n-3)!}\bigl(f^{(2n-3)}(\infty) - f^{(2n-3)}(1)\bigr) + P,$$

$$P = \frac{-4^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi(t, 2n)\sum_0^\infty{}_k f^{(2n)}\bigl(1 + 4(k+t)\bigr)\,dt + \frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi(t, 2n)\sum_0^\infty{}_k f^{(2n)}\bigl(1 + 2(k+t)\bigr)\,dt.$$

Vorgelegt sei nun die Reihe

$$\frac{k'K}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{2q}{1+q} + \frac{2q^3}{1+q^3} - \frac{2q^5}{1+q^5} + \cdots \text{ Jacobi}^{33)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2q}{1+q} + \frac{2q^3}{1+q^3} - \cdots + (-1)^a\frac{2q^{2a-1}}{1+q^{2a-1}} - \sum_a^\infty{}_k \frac{2q^{2k+1}(-1)^k}{1+q^{2k+1}}.$$

$$q < 1.$$

---

* Saalschütz a. a. O.

Man setze $q = p^{-1}$, $p > 1$. Auf analoge Weise wie in I erkennt man, daß $\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{2}{1+p^x}\right)_{x=\infty} = 0$. Die erzeugende Funktion ist $f(x) = \frac{2}{1+p^{2a+x}}$; es ist also

$$2\sum_0^\infty {}^k \frac{2(-1)^k}{1+p^{2(k+a)+1}} = \frac{2}{p^{2a+1}+1} - \frac{E_1}{1!} f'(1) + \frac{E_3}{3!} f'''(1) - \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{E_{2n-3}}{(2n-3)!} f^{(2n-3)}(1) + P.$$

Es ist $f(x) = \frac{2}{1+p^{2a+x}} = \frac{2}{1+e^{(2a+x)\lg p}} = \frac{2}{1+e^{2\left(\frac{2a+x}{2}\lg p\right)}}$; also ist nach S. 29:

$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{2}{1+e^{(2a+x)\lg p}}\right) = (\lg p)^k \cdot \gamma_1(x \lg p)\, \delta_k(x \lg p)$, wobei $\gamma_1 \delta_k$ U.-E. Z. bedeuten.

$\gamma_1 = \frac{2}{e^{(2a+x)\lg p}+1} = f(x)$, $\quad f^{(2k+1)}(1) = \gamma_1(2a+1)\,\delta_{2k+1}(2a+1)$ und

$$2\sum_0^\infty {}^k \frac{2(-1)^k}{1+p^{2(k+a)+1}} = \frac{2}{1+p^{2a+1}}\left\{1 - \frac{\delta_1 E_1}{1!} \cdot \lg p + \frac{\delta_3 E_3}{3!}(\lg p)^3 - \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{\delta_{2n-3} E_{2n-3}}{(2n-3)!} (\lg p)^{2n-3}\right\} + P.$$

Zur Bestimmung des Restes soll $f^{(2n)}(x)$ in eine Partialbruchreihe verwandelt werden; es ist (S. 29):

$$\gamma_1 \delta_{2n} = \frac{d^{2n}}{dw^{2n}}\left(\frac{2}{1+e^w}\right)$$

$$= -i\left(-\frac{i}{2}\right)^{2n} \cdot (2n)! \sum \left(\frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} + \frac{iw}{2}\right]^{2n+1}} - \frac{1}{\left[(2l+1)\frac{\pi}{2} - \frac{iw}{i}\right]^{2n+1}}\right)$$

$$= 2 \cdot i(-1)^{n+1} \cdot (2n)! \sum \frac{[(2l+1)\pi - iw]^{2n+1} - [(2l+1)\pi + iw]^{2n+1}}{[(2l+1)^2\pi^2 + w^2]^{2n+1}}$$

$$= 2i(-1)^{n+1} \cdot (2n)! \sum \frac{\left(\cos \operatorname{arctg} \frac{w}{(2l+1)\pi} - i \sin \div\right)^{2n+1} - (\cos \div + i \sin \div)^{2n+1}}{[(2l+1)^2\pi^2 + w^2]^{(2n+1):2}}$$

$$= 4(-1)^{n+1} \cdot (2n)! \sum \frac{\sin\left\{(2n+1) \operatorname{arctg} \frac{w}{(2l+1)\pi}\right\}}{[(2l+1)^2\pi^2 + w^2]^{(2n+1):2}}.$$

Also ist

$$f^{(2n)}(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{2}{1+e^{(2a+x)\lg p}}\right)$$

$$= 4 \cdot (-1)^{n+1} \cdot (2n) \sum \frac{\sin\left\{(2n+1) \operatorname{arctg} \frac{(2a+x)\lg p}{(2l+1)\pi}\right\}}{\left[(2l+1)^2\pi^2 + ((2a+x)\lg p)^2\right]^{n+\frac{1}{2}}} \cdot (\lg p)^{2n}.$$

Den in P unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck kann man schreiben

$$P = -\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi(t, 2n)\sum_k \Big\{ 2^{2n+1} f^{(2n)}\big(1+4(k+t)\big)$$
$$-\left[f^{(2n)}(1+4k+2t)+f^{(2n)}(3+4k+2t)\right]\Big\}\,dt,$$

oder für den Ausdruck unter der Summe

$$(2n)!\,(\lg p)^{2n}\cdot 4\,(-1)^{n+1}\sum\left\{2^{2n+1}\frac{\sin\left\{(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{(m+4t)\lg p}{(2l+1)\pi}\right\}}{[(2l+1)^2\pi^2+(m+4t)^2(\lg p)^2]^{n+\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\left\{(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{(m+2t)\lg p}{(2l+1)\pi}\right\}}{[(2l+1)^2\pi^2+(m+2t)^2(\lg p)^2]^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{\sin\left\{(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{(m+2+2t)\lg p}{(2l+1)\pi}\right\}}{[(2l+1)^2\pi^2+(m+2+2t)^2(\lg p)^2]^{n+\frac{1}{2}}}\right\}$$
$$(m = 2a + 4k + 1).$$

Obiger Ausdruck ist kleiner als

$$(2n)!(\lg p)^{2n}\cdot 4(2^{2n+1}+2)\left\{\frac{1}{[\pi^2+(m+2t)^2(\lg p)^2]^{n+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{[(3\pi)^2+(m+2t)^2(\lg p)^2]^{n+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\},$$

was man erhält, wenn man $\cos\varphi = 1$ setzt und den kleinsten der drei Nenner als gemeinsamen wählt. Ähnlich dem Falle I ist dann der obige Ausdruck

$$\left|\,2^{2n+1} f^{(2n)}(1+4k+4t)-f^{(2n)}(1+4k+2t)-f^{(2n)}(3+4k+2t)\right|$$
$$<8(2n)!(\lg p)^{2n}(2^{2n}+1)\left\{\frac{1}{[\pi^2+(m+2t)^2(\lg p)^2]^{n-r}}+\frac{1}{[(3\pi)^2+(m+2t)^2(\lg p)^2]^{n-r}}+\cdots\right\}$$
$$\times\frac{1}{[\pi^2+(m+2t)^2(\lg p)^2]^{r+\frac{1}{2}}}<\frac{8\cdot(2n)!\,(\lg p)^{2n}(2^{2n}+1)\,\sigma_{2(n-r)}}{\pi^{2(n-r)}[\pi^2+(m+2t)^2(\lg p)^2]^{r+\frac{1}{2}}}.$$

Dann ist aber

$$\left|\sum_0^\infty{}_k\left\{2^{2n+1}f^{(2n)}(1+4(k+t))-f^{(2n)}(1+2(2k+t))-f^{(2n)}(3+2(2k+t))\right\}\right|$$
$$<\frac{(2n)!\,8(\lg p)^{2n}(2^{2n}+1)\,\sigma_{2(n-r)}}{\pi^{2(n-r)}}\left\{\frac{1}{[\pi^2+(2a+1)^2(\lg p)^2]^{r+\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{[\pi^2+(2a+5)^2(\lg p)^2]^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}.$$

Besteht die Ungleichung $4(\mu-1)\lg p<\pi<4\mu\lg p$, μ ganze Zahl, so erhält man

$$\left|\sum\right|<\frac{(2n)!\,8(\lg p)^{2n}(2^{2n}+1)\,\sigma_{2(n-r)}}{\pi^{2n+1}}\left\{\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2a+1}{4\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2a+5}{4\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2a+9}{4\mu}\right)^2\right]^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}.$$

Es sei $\lambda-1<\left(\frac{2a+1}{4\mu}\right)^2<\lambda$, und man erhält durch Zusammenfassen von je μ Gliedern

$$\left|\sum\right| < \frac{(2n)!\,8\,(\lg p)^{2n}\,(2^{2n}+1)\,\sigma_{2(n-r)}\,\mu}{\pi^{2n+1}}\left\{\frac{1}{\lambda^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(\lambda+1)^{r+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(\lambda+2)^{r+\frac{1}{2}}}+\cdots\right\}$$

$$< \frac{(2n)!\,8\,(\lg p)^{2n}\,(2^{2n}+1)\,\mu\,\sigma_{2(n-r)}\,s_{r+\frac{1}{2}}}{\pi^{2n+1}\,\lambda^{r-\frac{1}{2}}}.$$

Das Restglied nimmt analog dem Falle I die Form an

$$P = \varrho\,\frac{32\,(2\lg p)^{2n}\,(2^{2n}+1)\cdot(2n)!\,\mu\,s_{r+\frac{1}{2}}\,s_{2n}\,\sigma_{2(n-r)}}{\pi^{2n+1}\,(2\pi)^{2n}\,\lambda^{r-\frac{1}{2}}},$$

die auch geschrieben werden kann

$$P = \varrho\,\frac{32\,(2n)!\,(2^{2n}+1)\cdot\mu\cdot(4\mu)^{2n-3}}{4^{2n}\,(\mu-1)^{2n}\,\pi^{2n+1}\,(2a+1)^{2n-3}}\,s_{r+\frac{1}{2}}\,s_{2n}\,\sigma_2,$$

$$P = \varrho\cdot\frac{8\cdot(2n)!\,(4\mu)^{2n-2}}{2^{2n}\,(\mu-1)^{2n}\,\pi^{2n+1}\,(2a+1)^{2n-3}}\cdot\frac{2^{2n}+1}{2^{2n}}\cdot s_{n-\frac{1}{2}}\,s_{2n}\,\sigma_2.$$

Da $\frac{2^{2n}+1}{2^{2n}}$ nur wenig von 1 verschieden ist und sich der Einheit mit wachsendem n nähert, so erkennt man, daß P am kleinsten wird, wenn $n = \left[\frac{(2a+1)\,\pi\,(\mu-1)}{4\mu}\right]$ ist. Im übrigen gilt das unter I Gesagte.

III. Als letztes Beispiel soll versucht werden, die **Lambert**sche Reihe zu transformieren, doch nicht nach der Methode Schlömilchs*, sondern nach Absonderung einer bestimmten Anzahl von Gliedern. Es ist

$$L(q) = \frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^3}+\cdots \qquad q<1 \quad q=\frac{1}{p} \quad p>1.$$

$$L(q) = \frac{1}{p-1}+\frac{1}{p^2-1}+\cdots\frac{1}{p^{a-1}-1}+\frac{1}{p^a-1}+\frac{1}{p^{a+1}-1}+\cdots$$

Die erzeugende Funktion ist hier

$$f(x) = \frac{1}{p^x-1} = \frac{1}{e^{x\lg p}-1}.$$

Da
$$\int_a^\infty \frac{dx}{p^x-1} = \left[\frac{\log(1-p^{-x})}{\lg p}\right]_a^\infty = -\frac{\log(1-p^{-a})}{\log p}$$
und

$$f^{(k)}(x) = (\lg p)^k\cdot c\,(a\lg p)\cdot b_k(a\lg p) \qquad \text{(Krause, Berichte, S. 156),}$$

b_k aber die U.-B. Z. sind, so erhält man nach der **Euler**schen Summenformel

$$L(q) = \frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{1-q^2}+\cdots+\frac{q^{a-1}}{1-q^{a-1}}+\frac{\log(1-q^a)}{\log q}+$$

$$\frac{q^a}{1-q^a}\left\{\frac{1}{2}+\frac{B_1\,b_1}{2!}(\lg q)-\frac{B_3\,b_3}{4!}(\lg q)^3+\cdots+(-1)^n\frac{B_{2n-3}\,b_{2n-3}}{(2n-2)!}(\lg q)^{2n-3}\right\}+P_{2n}$$

$$P_{2n} = -\frac{1}{(2n)!}\int_0^1 \varphi(t,2n)\left(f^{(2n)}(a+t)+f^{(2n)}(a+1+t)+f^{(2n)}(a+2+t)\cdots\right)dt.$$

---

* Höhere Analysis, Bd. II, S. 242.

Nun ist aber (Schlömilch, Höhere Analys. Bd. II S. 240)

$$\frac{1}{e^{v}-1} = -\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2v} + \frac{v}{(2\pi)^2+v^2} + \frac{v}{(4\pi)^2+v^2} + \cdots\right),$$

$$\frac{d^{2n}}{d v^{2n}}\left(\frac{1}{e^{v}-1}\right) = \frac{(2n)!}{v^{2n+1}} + 2\cdot(2n)!\left(\frac{\cos\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{2\pi}{v}\right]}{[(2\pi)^2+v^2]^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\cos\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{4\pi}{v}\right]}{[(4\pi)^2+v^2]^{n+\frac{1}{2}}} + \cdots\right)$$

$$f^{(2n)}(x) = 2\cdot(2n)!\,(\lg p)^{2n}\left(\frac{1}{2(x\lg p)^{2n+1}} + \frac{\cos\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{2\pi}{x\lg p}\right]}{[(2\pi)^2+(x\lg p)^2]^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\cos\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{4\pi}{x\lg p}\right]}{[(4\pi)^2+(x\lg p)^2]^{n+\frac{1}{2}}} + \cdots\right)$$

$$< 2\cdot(2n)!\,(\lg p)^{2n}\left[\frac{1}{2(x\lg p)^{2n+1}} + \frac{s_{2(n-r)}}{[(2\pi)^2+(x\lg p)^2]^{r+\frac{1}{2}}(2\pi)^{2(n-r)}}\right].$$

Also ist weiter

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{h} f^{(2n)}(a+h+t) < 2\cdot(2n)!\,(\lg p)^{2n}\left[\frac{1}{2(a\lg p)^{2n+1}} + \frac{1}{2((a+1)\lg p)^{2n+1}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{s_{2(n-r)}}{(2\pi)^{2(n-r)}}\left\{\frac{1}{[(2\pi)^2+(a\lg p)^2]^{r+\frac{1}{2}}} + \cdots\right\}\right]$$

$$< 2\cdot(2n)!\,(\lg p)^{2n}\left[\frac{s_{2n+1}}{2(\lg p)^{2n+1}a^{2n}} + \frac{s_{2(n-r)}}{(2\pi)^{2n+1}}\left\{\frac{1}{\left(1+\left(\frac{a}{\mu}\right)^2\right)^{r+\frac{1}{2}}} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{a+1}{\mu}\right)^2\right)^{r+\frac{1}{2}}} + \cdots\right\}\right],$$

wenn $(\mu-1)\lg p < 2\pi < \mu\lg p$, $\lg p > \frac{2\pi}{\mu}$ ist. Setzt man weiter, indem man in der letzten Summe stets μ Glieder zusammenfaßt, $\lambda - 1 < \left(\frac{a}{\mu}\right)^2 < \lambda$, so ergibt sich

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{h} f^{(2n)}(a+h+t) < 2\cdot(2n)!\,(\lg p)^{2n}\left[\frac{s_{2n}}{2(\lg p)^{2n+1}a^{2n}} + \frac{s_{2(n-r)}\,\mu\, s_{r+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n+1}\lambda^{r-\frac{1}{2}}}\right], \text{ also}$$

$$P_{2n} < \frac{B_{2n-1}}{\lg p}\left[\frac{1}{2a^{2n}} + \frac{\mu^{2r}}{(\mu-1)^{2n+1}a^{2r-1}}\right] \qquad [r = n-1]$$

$$P_{2n} < \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}a^{2n}\cdot\lg p}\left(1 + 2\left(\frac{a}{\mu-1}\right)^3\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{2n-2}\right).$$

Man erkennt, daß auch hier P_{2n} am kleinsten wird, wenn ist:

$$n = \left[a\pi\frac{\mu-1}{\mu}\right],$$

und es gelten dieselben Restbetrachtungen wie unter I und II.

Zahlenbeispiel: $\lg p = \frac{1}{5}$, $a = 10$, $n = 31$, $\mu = 32$.

Da in diesem Falle

$$b_1 = -1{,}156516, \quad b_3 = -2{,}412598, \quad b_5 = -11{,}9839$$

ist, so ergibt sich $\qquad \frac{\lg(1-q^{10})}{\lg q} = 0{,}727067$

$$L(q) = 4{,}516651 + 2{,}033243 + 1{,}216375 + 0{,}815966 + 0{,}581977 + 0{,}431013$$
$$+ 0{,}327311 + 0{,}252970 + 0{,}198034 + 0{,}727067$$
$$+ 0{,}156518\,(0{,}0192753 - 0{,}0000268 + 0{,}0000001 + \tfrac{1}{2})$$
$$= \underline{11{,}181879}$$

Der Fehler beim Abbrechen nach dem dritten Gliede macht sich erst in der achten Stelle bemerkbar, kann also bei einer siebenstelligen Genauigkeit nicht ins Gewicht fallen. Würde man den günstigsten Fall in Betracht ziehen, so erhielte man bei Berechnung von 30 Gliedern der Eulerschen Summenformel eine Genauigkeit auf 24 Dezimalen. Hätte man das obige Zahlenbeispiel mit Hilfe der ursprünglichen Lambertschen Reihe auf 7 Dezimalen genau berechnen wollen, so hätte man nicht weniger als 100 Glieder, mit Hilfe der Clausenschen Transformation 10 Glieder berechnen müssen; die Schlömilchsche Transformation, die im obigen Beispiele bei gleicher Genauigkeit ebenfalls mit 3 Gliedern zum Ziele führt, hat vor der oben entwickelten den Vorzug, daß bei ihr die Summation der 9 Anfangsglieder wegfällt.

Abschnitt B.

Summation trigonometrischer Reihen.

§ 1.

Ableitung von Summenformeln.

A. In der allgemeinen Summenformel*

$$(\varepsilon - 1)\Big(f(x) + \varepsilon f(x+h) + \varepsilon^2 f(x+2h) + \cdots + \varepsilon^{s-1} f(x + \overline{s-1}\,h)\Big)$$
$$= \varepsilon^s f(x+sh) - f(x) + \frac{b_1 h}{1!}\Big(\varepsilon^s f'(x+sh) - f'(x)\Big) + \cdots$$
$$+ \frac{b_m h^m}{m!}\Big(\varepsilon^s f^{(m)}(x+sh) - f^{(m)}(x)\Big) + P_m,$$

$$P_m = \frac{s h^{m+1}}{c \cdot m!} \int\limits_0^1 B_m(1-t, u) \sum_0^{s-1}{}_{\varrho}\, \varepsilon^{\varrho} f^{(m+1)}(x + \varrho h + ht)\, dt,$$

die aus der Theorie der U.-B. Z. gewonnen ist, bedeutet $\varepsilon = e^{2ui}$. Es soll nun reeller und imaginärer Bestandteil voneinander getrennt werden; zu diesem Zwecke multipliziere man links und rechts mit $c = \frac{1}{\varepsilon - 1}$; ferner beachte man, daß $2c = c' + c''$, $2cb_{2\mu} = c' b'_{2\mu}$, $2cb_{2\mu+1} = c'' b''_{2\mu+1}$ ist. Bedeutet $\overset{c}{s}[\alpha] = \cos\alpha + i\sin\alpha$, so erhält man

---

* Krause: Zur Theorie der Maclaurinschen Summenformel. Archiv d. Math. u. Phys., III. Reihe, V. S. 179 ff.

4*

$$f(x) + f(x+h)\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{s}[2u] + f(x+2h)\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{s}[4u] + \cdots + f(x+\overline{s-1}h)\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{s}[2(s-1)u]$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big\{(c'+c'')\Big(\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{s}[2su]f(x+sh)-f(x)\Big) + \frac{c''b_1''}{1!}h\Big(f'(x+sh)\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{s}[2su]-f'(x)\Big)$$
$$+ \frac{c'b_2'}{2!}h^2\Big(f''(x+sh)\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{s}[2su]-f''(x)\Big) + \cdots$$
$$+ \frac{c'_{2\mu}b'_{2\mu}}{(2\mu)!}h^{2\mu}\Big(f^{(2\mu)}(x+sh)\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{s}[2su]-f^{(2\mu)}(x)\Big)\Big\} + cP_{2\mu}.$$

Der reelle, bzw. imaginäre Bestandteil der linken Seite hat die Form

$$f(x) + f(x+h)\cos 2u + f(x+2h)\cos 4u + \cdots + f(x+\overline{s-1}h)\cos 2(s-1)u,$$
resp. $\quad f(x+h)\sin 2u + f(x+2h)\sin 4u + \cdots + f(x+\overline{s-1}h)\sin 2(s-1)u;$

zerlegt man analog den rechts in { } stehenden Ausdruck, so ergibt sich als reeller Bestandteil

$$E''_{2\mu} = c''\Big[\Big(f(x+sh) + \frac{b_1''}{1!}hf'(x+sh) + \frac{b_3''}{3!}h^3f'''(x+sh) + \cdots$$
$$+ \frac{b''_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x+sh)\Big)\cos 2su$$
$$-\Big(f(x) + \frac{b_1''}{1!}hf'(x) + \frac{b_3'}{3!}h^3f'''(x) + \cdots + \frac{b''_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x)\Big)\Big]$$
$$+ic'\Big[f(x+sh) + \frac{b_2'}{2!}h^2f''(x+sh) + \cdots + \frac{b'_{2\mu}}{(2\mu)!}h^{2\mu}f^{(2\mu)}(x+sh)\Big]\sin 2su$$

und als imaginärer Bestandteil

$$E'_{2\mu} = c'\Big[\Big(f(x+sh) + \frac{b_2'}{2!}h^2f''(x+sh) + \cdots + \frac{b'_{2\mu}h^{2\mu}}{(2\mu)!}f^{(2\mu)}(x+sh)\Big)\cos 2su$$
$$-\Big(f(x) + \frac{b_2'}{2!}h^2f'(x) + \frac{b_4'}{4!}h^4f^{(4)}(x) + \cdots + \frac{b'_{2\mu}}{(2\mu)!}h^{2\mu}f^{(2\mu)}(x)\Big)\Big]$$
$$+ic''\Big[f(x+sh) + \frac{b_1''}{1!}hf'(x+sh) + \cdots + \frac{b''_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x+sh)\Big]\sin 2su.$$

Da ferner $2cB_{2\mu}(1-t,u) = B'_{2\mu}(1-t,u) + B''_{2\mu}(1-t,u)$ ist, wobei $B'_{2\mu}$ rein imaginär und $B''_{2\mu}$ rein reell ist, so erhält man durch Spalten von $cP_{2\mu}$ in den reellen und imaginären Bestandteil

$$P''_{2\mu} = \frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu)!}\int_0^1\Big[B''_{2\mu}(1-t,u)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\cos 2(\varrho+1)u$$
$$+iB'_{2\mu}(1-t,u)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\sin 2(\varrho+1)u\Big]dt, \quad \text{(reell)}$$

$$P'_{2\mu} = \frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu)!}\int_0^1\Big[B'_{2\mu}(1-t,u)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\cos 2(\varrho+1)u$$
$$+iB''_{2\mu}(1-t,u)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\sin 2(\varrho+1)u\Big]dt. \quad \text{(imaginär)}$$

Man findet also schließlich durch Vergleich der reellen und der imaginären Bestandteile aus dem obigen Ausdrucke folgende beiden Summenformeln:

$$\underline{f(x)+f(x+h)\cos 2u+f(x+2h)\cos 4u+\cdots+f(x+\overline{s-1}h)\cos 2(s-1)u}$$
$$\underline{=\frac{1}{2}(E''_{2\mu}-P''_{2\mu}),}$$
$$\underline{f(x+h)\sin 2u+f(x+2h)\sin 4u+\cdots+f(x+\overline{s-1}h)\sin 2(s-1)u}$$
$$\underline{=-\frac{i}{2}(E'_{2\mu}-P'_{2\mu}).}$$

Ist insbesondere $f(x)$ so beschaffen, daß $[f^{(k)}(x)]_{x=\infty}=0$, $k=0,1,2,\ldots 2\mu$ ist, und setzt man $s=\infty$, so ergeben sich die einfacheren Formeln

$$\underline{f(x)+f(x+h)\cos 2u+f(x+2h)\cos 4u+\cdots}$$
$$\underline{=-\frac{c''}{2}\left\{f(x)+\frac{b''_1}{1!}hf'(x)+\frac{b''_3}{3!}h^3f'''(x)+\cdots+\frac{b''_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x)\right\}-\frac{1}{2}P''_{2\mu},}$$
$$\underline{f(x+h)\sin 2u+f(x+2h)\sin 4u+f(x+3h)\sin 6u+\cdots}$$
$$\underline{=\frac{ic'}{2}\left\{f(x)+\frac{b'_2}{2!}h^2f''(x)+\frac{b'_4}{4!}h^4f^{(4)}(x)+\cdots+\frac{b'_{2\mu}}{(2\mu)!}h^{2\mu}f^{(2\mu)}(x)\right\}+\frac{i}{2}P'_{2\mu}.}$$

Schließlich soll noch der Rest $P''_{2\mu}$ und $iP'_{2\mu}$ eine vom Integralzeichen freie Form erhalten. Zur Abkürzung setze man

$$\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\cos 2(\varrho+1)u_r=C(t),$$
$$\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\sin 2(\varrho+1)u_r=S(t),$$

indem für u von vornherein ein rationaler Bruch von π: $\frac{r}{n}\pi=u_r$ gesetzt werden soll; man kann dies ja mit beliebig großer Genauigkeit jederzeit tun. Dann wird

$$P''_{2\mu}=\frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu)!}\int_0^1[C(t)\cdot B''_{2\mu}(1-t,u_r)+iS(t)\,B'_{2\mu}(1-t,u_r)]\,dt.$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $0<r<\frac{n}{4}$. Dann sind sowohl $(-1)^{\mu+1}B''_{2\mu}(1-t,u_r)$, als auch $(-1)^{\mu}iB'_{2\mu}(1-t,u_r)$ für $0\leqq t\leqq 1$ stets positiv; man kann also den Mittelwertsatz anwenden und erhält

$$\int_0^1[C(t)\cdot B''_{2\mu}(1-t,u_r)+iS(t)\,B'_{2\mu}(1-t,u_r)]\,dt$$
$$=-\overline{C(t)}\int_0^1 B''_{2\mu}(t,u_r)\,dt-\overline{S(t)}\int_0^1 B'_{2\mu}(t,u_r)\,dt,$$

wobei

$$\overline{C(t)}=\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht')\cos 2(\varrho+1)u_r,$$
$$\overline{S(t)}=\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht'')\sin 2(\varrho+1)u_r,$$
$$(0<t'<1,\quad 0<t''<1)$$

bedeutet.

$$\int_0^1 \div = \frac{-\overline{C(t)}}{2\mu+1}\left(B''_{2\mu+1}(1, u_r) - c''\, b''_{2\mu+1}\right) - \frac{i\overline{S(t)}}{2\mu+1} B'_{2\mu+1}(1, u_r)$$

$$= -2\frac{c''\, b''_{2\mu+1}}{2\mu+1} \sin\frac{r}{n}\pi \left\{\overline{S(t)} \cos\frac{r}{n}\pi - \overline{C(t)} \sin\frac{r}{n}\pi\right\};$$

$$\underline{P''_{2\mu} = 2\frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} c''\, b''_{2\mu+1}\left\{\overline{C(t)} \sin\frac{r}{n}\pi - \overline{S(t)} \cos\frac{r}{n}\pi\right\} \sin\frac{r}{n}\pi;}$$

entsprechend

$$\underline{iP'_{2\mu} = -2\frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} c''\, b''_{2\mu+1}\left\{\overline{S(t)} \sin\frac{r}{n}\pi + \overline{C(t)} \cos\frac{r}{n}\pi\right\} \sin\frac{r}{n}\pi.}$$

2. Fall: $\frac{n}{4} < r < \frac{n}{2}$. $(-1)^{\mu+1} B''_{2\mu}(1-t, u_r)$ ist stets positiv, während $(-1)^{\mu} i B'_{2\mu}$ das Zeichen für $0 \leqq t \leqq 1$ wechselt. Hier kann man sich durch partielle Integration helfen.

$$\int_0^1 [C(t)\, B''_{2\mu}(1-t, u_r) + iB'_{2\mu}(1-t, u_r)\, S(t)]\, dt = 2\frac{\overline{C(t)}}{2\mu+1} \sin^2 u_r \cdot c''\, b''_{2\mu+1}$$

$$+ i\left[S(t)\int B'_{2\mu}(1-t, u_r)\, dt\right]_0^1 - i\int_0^1\left(\int B'_{2\mu}(1-t, u_r)\, dt\right) S'(t)\, dt$$

$$= \frac{2\overline{C(t)}}{2\mu+1} c''\, b''_{2\mu+1} \sin^2 u_r - i\left[S(1-t)\frac{B'_{2\mu+1}(t, u_r)}{2\mu+1}\right]_0^1 + \frac{i}{2\mu+1}\int_0^1 B'_{2\mu+1}(t, u_r)\, S'(1-t)\, dt.$$

Nun ist auch $(-1)^{\mu} i B'_{2\mu+1}(t, u_r)$ stets positiv für $0 \leqq t \leqq 1$, so daß wir schließen können:

$$\int_0^1 \div = \frac{2\overline{C(t)}}{2\mu+1} c''\, b''_{2\mu+1} \sin^2 u_r - \frac{2\, S(0)}{2\mu+1} c''\, b''_{2\mu+1} \sin u_r \cos u_r$$

$$- \frac{2i\overline{S'(t)}}{(2\mu+1)(2\mu+2)} c'\, b'_{2\mu+2} \sin^2 u_r.$$

Dann ist also, wenn

$$\overline{S'(t)} = h \cdot \sum_{0}^{s-1}{}_{\varrho} f^{(2\mu+2)}(x + h\varrho + ht) \sin 2(\varrho+1) u_r$$

bedeutet,

$$\underline{P''_{2\mu} = 2\frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}\left\{c''\, b''_{2\mu+1}\overline{C(t)} \sin u_r - c''\, b''_{2\mu+1} S(0) \cos u_r\right.}$$

$$\underline{\left. - \frac{ic'\, b'_{2\mu+2}}{2\mu+2}\overline{S'(t)} \sin u_r\right\} \sin u_r,}$$

$$\underline{iP'_{2\mu} = 2\frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}\left\{-c''\, b''_{2\mu+1}\overline{S(t)} \sin u_r + c''\, b''_{2\mu+1} C(0) \cos u_r\right.}$$

$$\underline{\left. - \frac{ic'\, b'_{2\mu+2}}{2\mu+2}\overline{C'(t)} \sin u_r\right\} \sin u_r.}$$

Erfüllt $f(x)$ die Eigenschaft, daß $f^{(2\mu+1)}(x)$ im Intervalle das Zeichen nicht wechselt, so kann man einen Mittelwert von $B'_{2\mu}$ und $B''_{2\mu}$ aus dem Integrale herausheben und über $f^{(2\mu+1)}(x)$ integrieren; doch soll dies nur an einem Beispiele durchgeführt werden.

B) Führt man in den Reihen unter A), in denen $u = u_r = \frac{r}{n}\pi$ ist, $r = m - 2k$ ein, so gehen sie über in

$$f(x) - f(x+h)\cos 2u + f(x+2h)\cos 4u \pm \cdots$$
$$+ (-1)^{s+1} f(x + \overline{s-1}h)\cos 2(s-1)u = \tfrac{1}{2}(E''_{2\mu} - P''_{2\mu}),$$
$$- f(x+h)\sin 2u + f(u+2h)\sin 4u \mp \cdots$$
$$+ (-1)^{s+1} f(x + \overline{s-1}h)\sin 2(s-1)u = \frac{i}{2}(E'_{2\mu} - P'_{2\mu}).$$
$$\left(u = u_k = \frac{k}{m}\pi\right).$$

$\sin u_r$ verwandelt sich dabei in $\cos u_k$. Dann gehen aber nach den in Kapitel I, § 3, Ende, abgeleiteten Rekursionsformeln die U.-B. Z $b'_{2\mu}$ in die U.-E. Z. $\delta''_{2\mu}$, die U.-B. Z. $b''_{2\mu+1}$ in die U.-E. Z. $\delta'_{2\mu+1}$ über, $\gamma'_1 = -c''$, γ''_1 entsteht dabei aus c'. Also werden weiter, wie S. 38 schon hervorgehoben, die U.-B. F. $B'_{2\mu}$, $B'_{2\mu+1}$, $B''_{2\mu}$, $B''_{2\mu+1}$ der Reihe nach übergehen in die U.-E. F. $D''_{2\mu}$, $D''_{2\mu+1}$, $-D'_{2\mu}$, $-D'_{2\mu+1}$, und aus den unter A) abgeleiteten Summationsformeln ergeben sich die folgenden beiden neuen:

$$\underline{f(x) - f(x+h)\cos 2u + f(x+2h)\cos 4u - \cdots}$$
$$\underline{+ (-1)^{s+1} f(x + \overline{s-1}h)\cos 2(s-1)u = \tfrac{1}{2}(E''_{2\mu} - P''_{2\mu})},$$

wobei nun

$$E''_{2\mu} = -\gamma'_1\Big[(-1)^s\Big(f(x+sh) + \frac{\delta'_1}{1!}hf'(x+sh) + \frac{\delta'_3}{3!}h^3f'''(x+sh) + \cdots$$
$$+ \frac{\delta'_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x+sh)\Big)\cos 2su$$
$$-\Big(f(x) + \frac{\delta'_1}{1!}hf'(x) + \frac{\delta'_3}{3!}h^3f'''(x) + \cdots + \frac{\delta'_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x)\Big)\Big]$$
$$+ i\gamma''_1\Big[f(x+sh) + \frac{\delta''_2}{2!}h^2f''(x+sh) + \cdots$$
$$+ \frac{\delta''_{2\mu}}{(2\mu)!}h^{2\mu}f^{(2\mu)}(x+sh)\Big](-1)^{s+1}\sin 2su;$$

$$\underline{-f(x+h)\sin 2u + f(x+2h)\sin 4u - \cdots + (-1)^{s+1}f(x+\overline{s-1}h)\sin 2(s-1)u}$$
$$\underline{= \frac{i}{2}(E'_{2\mu} - P'_{2\mu})},$$

$$[illegible]\Big(f(x+sh) + \frac{\delta_2''}{2!}h^2 f''(x+sh) + \cdots + \frac{\delta_{2\mu}''}{(2\mu)!}h^{2\mu}f^{(2\mu)}(x+sh)\Big)\cos 2su$$
$$[illegible]\Big(f(x) + \frac{\delta_2''}{2!}h^2 f''(x) + \cdots + \frac{\delta_{2\mu}''}{(2\mu)!}h^{2\mu}f^{(2\mu)}(x)\Big)\Big]$$
$$[illegible]\Big(f(x+sh) + \frac{\delta_1'}{1!}hf'(x+sh) + \cdots + \frac{\delta_{2\mu-1}'}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x+sh)\Big)\Big]\sin 2su.$$

Ist [illegible] wieder $\lim_{x=\infty} f^{(k)}(x) = 0$, $k = 0, 1, 2 \ldots 2\mu$, so wird [illegible]

$$\frac{f(x) - f(x+h)\cos 2u + f(x+2h)\cos 4u - \cdots}{\frac{1}{2}\gamma_1'\Big(f(x) + \frac{\delta_1'}{1!}hf'(x) + \frac{\delta_3'}{3!}h^3 f'''(x) + \cdots + \frac{\delta_{2\mu-1}'}{(2\mu-1)!}h^{2\mu-1}f^{(2\mu-1)}(x)\Big) - \frac{1}{2}P_{2\mu}''}$$

$$\frac{f(x+h)\sin 2u + f(x+2h)\sin 4u - f(x+3h)\sin 6u + \cdots}{\frac{1}{2}\gamma_1''\Big(f(x) + \frac{\delta_2''}{2!}f''(x) + \frac{\delta_4''}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots + \frac{\delta_{2\mu}''}{(2\mu)!}f^{(2\mu)}(x)\Big) - \frac{i}{2}P_{2\mu}'.}$$

Die Restglieder nehmen die folgende Gestalt an:

$$P_{2\mu}'' = \frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu)!}\int_0^1\Big[D_{2\mu}'(1-t, u_h)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\cos 2(\varrho+1)u\cdot(-1)^{\varrho+1}$$
$$+ D_{2\mu}''(1-t, u_h)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\sin 2(\varrho+1)u(-1)^{\varrho}\Big]dt,$$

$$P_{2\mu}' = \frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu)!}\int_0^1\Big[D_{2\mu}''(1-t, u_h)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\cos 2(\varrho+1)u\cdot(-1)^{\varrho+1}$$
$$+ D_{2\mu}'(1-t, u)\sum_0^{s-1}{}_\varrho f^{(2\mu+1)}(x+h\varrho+ht)\sin 2(\varrho+1)u(-1)^{\varrho}\Big]dt.$$

Ihnen kann man analoge Gestalten geben, die vom Integralzeichen frei sind; setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\sum_0^{s-1}[illegible]\cos 2(\varrho+1)u_h = \Gamma[illegible].$$

und den Mittelwert der Summe $= \overline{\Gamma}$ [illegible].

$$\sum_0^{s-1}[illegible]\sin 2(\varrho+1)u_h = \Sigma[illegible].$$

und den Mittelwert der Summe $= \overline{\Sigma}$ [illegible].

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

2. Fall: $0 < k < \frac{m}{4}$:

$$P''_{2\mu} = -2\frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}\Big\{\gamma'_1\delta'_{2\mu+1}\overline{\Gamma(t)}\cos u_k + \gamma'_1\delta'_{2\mu+1}\Sigma(0)\sin u_k - \frac{i\gamma''_1\delta''_{2\mu+2}}{2\mu+2}\overline{\Sigma'(t)}\cos u_k\Big\}\cos u_k,$$

$$iP'_{2\mu} = -2\frac{h^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}\Big\{\gamma'_1\delta'_{2\mu+1}\overline{\Sigma(t)}\cos u_k + \gamma'_1\delta'_{2\mu+1}\Gamma(0)\sin u_k + \frac{i\gamma''_1\delta''_{2\mu+2}}{2\mu+2}\overline{\Gamma'(t)}\cos u_k\Big\}\cos u_k.$$

Alle die unter B) angeführten Resultate hätte man auch direkt erhalten können, wenn man analog dem Verfahren Krauses (s.o.) von der Taylorschen Entwickelung ausgegangen wäre und die U.-E. Z. δ_k eingeführt hätte. Durch die obige Ableitung tritt aber der innige Zusammenhang beider Summenformeln, der unter A) und unter B) erhaltenen recht deutlich zutage und zeigt, daß die eine aus der anderen durch bloße Transformation $r = m - 2k$ hervorgeht.

C) und D). Es erübrigt noch, Summationsformeln aufzustellen für die Reihen

$$f(x+h)\cos u + f(x+3h)\cos 3u + f(x+5h)\cos 5u + \cdots + f(x+\overline{2r-1}h)\cos(2r-1)u$$

$$f(x+h)\sin u + f(x+3h)\sin 3u + f(x+5h)\sin 5u + \cdots + f(x+\overline{2r-1}h)\sin(2r-1)u$$

$$f(x+h)\cos u - f(x+3h)\cos 3u + f(x+5h)\cos 5u - \cdots + (-1)^{r-1}f(x+\overline{2r-1}h)\cos(2r-1)u$$

$$f(x+h)\sin u - f(x+3h)\sin 3u + f(x+5h)\sin 5u - \cdots + (-1)^{r-1}f(x+\overline{2r-1}h)\sin(2r-1)u.$$

Dazu liefern die U.-B. Z. $a'_{2\mu}$ und $a''_{2\mu}$, resp. für die letzten beiden die U.-E. Z. $\varepsilon'_{2\mu}$ und $\varepsilon'_{2\mu+1}$ die Mittel, und man kann in der Tat derartige Summenformeln ableiten. Jedoch ist hier eine Lücke; in den Restgliedern treten nämlich die U.-B. F. $A_{2\mu}$ und $A''_{2\mu}$, resp. die U.-E. F. $E_{2\mu}$ und $E''_{2\mu}$ auf; diese sind aber nur für die Hälfte desjenigen Intervalles durch trigonometrische Reihen dargestellt und daher diskutierbar, über das zu integrieren ist; so liefern beispielsweise die betreffenden trigonometrischen Reihen die U.-B. F. $A_{2\mu}$ und $A''_{2\mu}$ nur in dem Intervalle $0 - \frac{1}{2}$, während das Integral über sie sich von 0 bis 1 erstreckt; die U.-E. F. $E'_{2\mu}$ und $E''_{2\mu}$ sind durch Reihendarstellung im Intervalle von 0 bis 1 bekannt, während man sie von 0 bis 2 braucht, und es ist mir nicht gelungen, ihre Diskussion auf das übrigbleibende Intervall auszudehnen.

Doch ist es möglich, die obigen Reihen mit leichter Mühe durch Zerlegung auf die unter A) und B) diskutierten zurückzuführen, so daß man dieser Schwierigkeit aus dem Wege gehen kann. So ist

$$f(x+h)\cos u + f(x+3h)\cos 3u + f(x+5h)\cos 5u + \cdots + f(x+\overline{2r-1}h)\cos(2r-1)$$

$$= \frac{1}{2\sin u}\Big\{f(x+h)\sin 2u + f(x+3h)\sin 4u + f(x+5h)\sin 6u + \cdots + f(x+\overline{2r-1}h)\sin 2ru\Big\}$$

$$-\frac{1}{2\sin u}\Big\{f(x+3h)\sin 2u + f(x+5h)\sin 4u + \cdots + f(x+\overline{2r-1}h)\sin 2(r-1)u\Big\}$$

$$= \frac{1}{2\sin u}\Big\{f(x'+2h)\sin 2u + f(x'+4h)\sin 4u + \cdots + f(x'+2rh)\sin 2ru\Big\}$$

$$-\frac{1}{2\sin u}\Big\{f(x''+2h)\sin 2u + f(x''+4h)\sin 4u + \cdots + f(x''+2(r-1)h)\sin 2(r-1)u\Big\}$$

wenn $x' = x - h$, $x'' = x + h$ bedeutet; also ist diese Reihe in zwei zerlegt, die nach den Formeln A) zu summieren sind. Entsprechend sind die anderen Reihen zu behandeln.

§ 2.

Anwendungen der abgeleiteten Summationsformeln.

I. Vorgelegt sei die Reihe

$$\frac{\cos 2u}{1^s} + \frac{\cos 4u}{2^s} + \frac{\cos 6u}{3^s} + \cdots + \frac{\cos 2ku}{k^s} + \cdots,$$

die konvergiert, sobald $s > 1$ ist. Hier ist die erzeugende Funktion $f(y) = \frac{1}{y^s}$; doch kann man die obige Reihe nicht direkt nach der unter A) in § 1 angegebenen Formel summieren, da, wenn man in der angeführten Formel $x = 0$ setzt, $\lim_{x=0} f^{(k)}(x) = \infty$ werden würde. Man kann jedoch die obige Reihe zerlegen

$$\sum_1^\infty{}_\varrho \frac{\cos 2\varrho u}{\varrho^s} = \frac{\cos 2u}{1^s} + \frac{\cos 4u}{2^s} + \cdots + \frac{\cos 2(k-1)u}{(k-1)^s}$$
$$+ \left\{\frac{1}{k^s} + \frac{\cos 2u}{(k+1)^s} + \frac{\cos 4u}{(k+2)^s} + \cdots\right\} \cos 2ku$$
$$- \left\{\qquad \frac{\sin 2u}{(k+1)^s} + \frac{\sin 4u}{(k+2)^s} + \cdots\right\} \sin 2ku.$$

Die ersten $k-1$ Glieder berechnet man gesondert; auf die beiden entstandenen unendlichen Reihen lassen sich die Summationsformeln unter A) § 1 anwenden.

Es ist $f^{(m)}(y) = \frac{(-1)^m s(s+1)(s+2)\cdots(s+m-1)}{y^{s+m}}$, also $f^{(m)}(\infty) = 0$; ferner ist sofort erkenntlich, daß $f^{(m)}(y)$ für positive Werte von y das Zeichen niemals ändert. Daher ist, da $h = 1$, $x = k$ ist,

$$\sum_1^\infty{}_\varrho \frac{\cos 2\varrho u}{\varrho^s} = \frac{\cos 2u}{1^s} + \frac{\cos 4u}{2^s} + \cdots + \frac{\cos 2(k-1)u}{(k-1)^s}$$
$$+ \cos 2ku\left[\frac{c''}{2}\left\{\frac{-1}{k^s} + \frac{b_1''}{1!}\frac{s}{k^{s+1}} + \frac{b_3''}{3!}\frac{s(s+1)(s+2)}{k^{s+3}} + \cdots\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{b_{2\mu-1}''}{(2\mu-1)!}\frac{s(s+1)\cdots(s+2\mu-2)}{k^{s+2\mu-1}}\right\} - \frac{1}{2}P_{2\mu}''\right]$$
$$- \sin 2ku\left[\frac{ic'}{2}\left\{\frac{1}{k^s} + \frac{b_2'}{2!}\frac{s(s+1)}{k^{s+2}} + \frac{b_4'}{4!}\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{k^{s+4}} + \cdots\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{b_{2\mu}'}{(2\mu)!}\frac{s(s+1)\cdots(s+2\mu-1)}{k^{s+2\mu}}\right\} + \frac{i}{2}P_{2\mu}'\right].$$

Der Rest $P''_{2\mu}$ bestimmt sich auf folgende Weise: es ist

$$P''_{2\mu} = \frac{-1}{(2\mu)!}\int_0^1 \left[B''_{2\mu}(1-t,\, u) \sum_0^\infty{}_\varrho \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+2\mu)}{(k+\varrho+t)^{s+2\mu+1}} \cos 2(\varrho+1)u \right.$$

$$\left. + iB'_{2\mu}(1-t,\, u) \sum_0^\infty{}_\varrho \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+2\mu)}{(k+\varrho+t)^{s+2\mu+1}} \sin 2(\varrho+1)u \right] dt$$

$$= \frac{-s(s+1)\cdots(s+2\mu)}{(2\mu)!} \sum_0^\infty{}_\varrho \int_0^1 \left[B''_{2\mu}(1-t,\, u) \frac{\cos 2(\varrho+1)u}{(k+\varrho+t)^{s+2\mu+1}} \right.$$

$$\left. + iB'_{2\mu}(1-t,\, u) \frac{\sin 2(\varrho+1)u}{(k+\varrho+t)^{2\mu+1}} \right] dt,$$

da $\frac{1}{(k+\varrho+t)^{s+2\mu+1}}$ im vorgelegten Intervalle $0 < t < 1$ stetig und die unendliche Reihe in diesem gleichmäßig konvergent ist. Weil ferner $\frac{1}{y^{s+2\mu+1}}$ für positive Werte y das Zeichen nicht ändert, kann man unter Anwendung des Mittelwertsatzes schreiben

$$P''_{2\mu} = \frac{s(s+1)\cdots(s+2\mu)}{(2\mu)!} \sum_0^\infty{}_\varrho \frac{1}{(s+2\mu)} \left\{ \frac{1}{(k+\varrho+1)^{s+2\mu}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(k+\varrho)^{s+2\mu}} \right\} \left\{ B''_{2\mu}(t''_\varrho, u) \cos 2(\varrho+1)u + iB'_{2\mu}(t'_\varrho, u) \sin 2(\varrho+1)u \right\}$$

$$0 < t'_\varrho < 1, \quad 0 < t''_\varrho < 1,$$

$$P''_{2\mu} < \frac{s(s+1)\cdots(s+2\mu-1)}{(2\mu)!} \left| \sum_0^\infty{}_\varrho \left(\frac{1}{(k+\varrho+1)^{s+2\mu}} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{(k+\varrho)^{s+2\mu}} \right) \right| \left\{ \left| B''_{2\mu}(t''_\varrho, u) \right| + \left| iB'_{2\mu}(t'_\varrho, u) \right| \right\}.$$

Aus der Reihenentwickelung für $B'_{2\mu}$ und B''_2 folgt aber, daß für $0 < t < 1$

$$iB'_{2\mu} < \frac{2\cdot(2\mu)!}{(2\pi)^{2\mu+1}} n^{2\mu+1} \left(\frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum \left(\frac{1}{(\ln+r)^{2\mu+1}} + \frac{1}{(\ln-r)^{2\mu+1}} \right) \right) < 4\cdot(2\mu)! \left(\frac{n}{2r\pi}\right)^{2\mu+1} \cdot \sigma_{2\mu+1},$$

$$B''_{2\mu} < 2\cdot(2\mu)! \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{2\mu+1} \left(\frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum \left(\frac{1}{(\ln+r)^{2\mu+1}} + \frac{1}{(\ln-r)^{2\mu+1}} \right) \right) < 4\cdot(2\mu)! \left(\frac{n}{2r\pi}\right)^{2\mu+1} \cdot \sigma_{2\mu+1}$$

ist, so daß wir erhalten

$$P''_{2\mu} < \frac{8\cdot(2\mu)!\, n^{2\mu+1} s(s+1)\cdots(s+2\mu-1)\cdot\sigma_{2\mu+1}}{(2\mu)!\,(2r\pi)^{2\mu+1}} \left| \sum_0^\infty{}_\varrho \left(\frac{1}{(k+\varrho+1)^{s+2\mu}} - \frac{1}{(k+\varrho)^{s+2\mu}} \right) \right|,$$

$$P''_{2\mu} < \frac{8\cdot n^{2\mu+1} s(s+1)\cdots(s+2\mu-1)\cdot\sigma_{2\mu+1}}{(2r\pi)^{2\mu+1}\, k^{s+2\mu}}.$$

Dieselben Grenzen ergeben sich für $iP'_{2\mu}$. Da man auch schreiben kann

$$P''_{2\mu} < \frac{8\cdot(2r\pi)^{s-2}\sigma_{2\mu+1}}{n^{s-2}\cdot k}\cdot\frac{s(s+1)\cdots(s+2\mu-1)\cdot n^{s+2\mu-1}}{(2r\pi)^{s+2\mu-1}k^{s+2\mu-1}},$$

so erkennt man, daß $P''_{2\mu}$ am kleinsten wird für

$$s+2\mu-1=\frac{2rk\pi}{n},\quad \mu=\left[\frac{rk\pi}{n}-\frac{s-1}{2}\right].$$

Aus der Form des Restes erkennt man leicht, daß er um so kleiner wird, je größer k wird, d. h. also je mehr Glieder abgesondert werden. Noch anders kann k gewählt werden; wird es nämlich so bestimmt, daß entweder $\cos\frac{2kr}{n}\pi=0$ oder $\sin\frac{2kr}{n}\pi=0$ ist, so fällt eine Reihe der rechten Seite weg.

Beispiel: $k=8$, $r=3$, $n=8$, $s=\frac{3}{2}$; dann ist $\mu=9$

$$\frac{\cos\frac{3}{4}\pi}{1^{\frac{3}{2}}}+\frac{\cos\frac{6}{4}\pi}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{\cos\frac{9}{4}\pi}{3^{\frac{3}{2}}}+\cdots=\frac{\cos 2u_r}{1^{\frac{3}{2}}}+\frac{\cos 4u_r}{2^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{\cos 14u_r}{7^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{8^{\frac{3}{2}}}+\frac{b''_1}{1!}\frac{\frac{3}{2}}{8^{\frac{5}{2}}}+\frac{b''_3}{3!}\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{8^{\frac{7}{2}}}+\cdots+\frac{b''_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}\frac{\frac{3}{2}\cdots(\frac{3}{2}+2\mu-2)}{8^{\frac{3}{2}+2\mu-1}}\right\}\cos 6\pi-\frac{1}{2}P''_{2\mu}.$$

Nun ist $b''_1(\frac{3}{8}\pi)=-0{,}5857864$, $b''_3=0{,}443642$, $b''_5=-1{,}468904$,

$b''_7=+10{,}79000$, $b''_9=-188{,}453$, $b''_{11}=+2814{,}70\cdots$

$$\frac{\cos\frac{3}{4}\pi}{1^{\frac{3}{2}}}+\frac{\cos\frac{6}{4}\pi}{2^{\frac{3}{2}}}+\cdots$$

$$=-0{,}70710678+0+0{,}1360827-0{,}08838835+0{,}0632456+0-0{,}0381802$$

$$-\tfrac{1}{2}\{-0{,}04419417-0{,}00485405+0{,}00008376-0{,}00000536+0{,}00000071$$

$$-0{,}00000022+0{,}00000006-0{,}00000003+0{,}00000002-\cdots\}$$

$$=-0{,}6343471+0{,}0244846=-\underline{0{,}6098625},\quad P''_{18}<0{,}00000005.$$

NB. Um die höheren U.-B. Z. zu berechnen, eignen sich die auf S. 39 abgeleiteten Rekursionsformeln wenig, da es einerseits beschwerlich ist, die Werte aus ihnen zu finden, und anderseits die Koeffizienten zugleich mit der Anzahl der Glieder sehr schnell wachsen. Dagegen sind für die Berechnung der höheren U.-B. Z. gerade die Entwickelungen in Potenzsummen (Krause S. 156)

$$cb_{2\mu}(u_r)=\frac{(2\mu)!}{(2i)^{2\mu+1}}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2\mu+1}\sigma^{(u_r)}_{2\mu+1},$$

$$cb_{2\mu-1}(u_r)=\frac{-(2\mu-1)!}{(2i)^{2\mu}}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2\mu}\Sigma^{(u_r)}_{2\mu},$$

vorteilhaft, da für größere Werte von ν auf eine große Anzahl von Dezimalstellen genau

$$\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} - \frac{1}{(n-r)^{2\mu+1}},$$

$$\Sigma_{2\mu}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \frac{1}{(n-r)^{2\mu}}\;*$$

ist, wobei man noch die beiden letzten Glieder vernachlässigen kann, sobald $\frac{r}{n}$ klein ist. Ähnliches gilt von den U.-E. Z.

II. Gegeben sei die Reihe

$$am\frac{2Ku}{\pi} = u + \frac{2q}{1+q^2}\sin 2u + \frac{2q^2}{1+q^4}\sin 4u + \frac{2q^3}{1+q^6}\sin 6u + \cdots \quad \text{Jacobi}^{33)}$$

In diesem Falle ist die erzeugende Funktion $f(y) = \frac{2q^y}{1+q^{2y}} = \frac{2e^{y\lg q}}{1+e^{2y\lg q}}$. Die obige Reihe $am\frac{2Ku}{\pi} - u$ wird erhalten für $x=0$, $h=1$. Es ist $f^{(k)}(\infty)=0$, $f^{(2k)}(0)=\left[\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\left(\frac{2}{e^{x\lg q}+e^{-x\lg q}}\right)\right]_{x=0}=(\lg q)^{2k}(-1)^k E_{2k}$ (Rogel); also ist

$$am\frac{2Ku}{\pi} = u + \frac{c'i}{2}\left\{1 - \frac{E_2 b_2'}{2!}(\lg q)^2 + \frac{E_4 b_4'}{4!}(\lg q)^4 - \cdots + (-1)^\mu \frac{E_{2\mu} b_{2\mu}'}{(2\mu)!}(\lg q)^{2\mu}\right\} + \frac{i}{2}P_{2\mu}'.$$

Zur Untersuchung des Restes mögen zwei Fälle unterschieden werden:

1) $0 < r < \frac{n}{4}$:

$$\frac{i}{2}P_{2\mu}' = -\frac{\sin u_r}{(2\mu+1)!}c'' b_{2\mu+1}''\left(\sum_0^\infty \varrho\left(f^{(2\mu+1)}(\varrho+t'')\sin 2(\varrho+1)u_r \sin u_r\right.\right.$$
$$\left.\left.+ f^{(2\mu+1)}(\varrho+t')\cos 2(\varrho+1)u_r\cos u_r\right)\right),$$

$$\frac{i}{2}P_{2\mu}' < \frac{c'' b_{2\mu+1}''}{(2\mu+1)!}\sin u_r \sum_0^\infty \varrho\left(f^{(2\mu+1)}(\varrho+t'')\sin 2(\varrho+1)u_r\sin u_r\right.$$
$$\left.+ f^{(2\mu+1)}(\varrho+t')\cos 2(\varrho+1)u_r\cos u_r\right).$$

Es ist nun (S. 43)

$$f^{(2\mu+1)}(x) < \frac{4\cdot(2\mu+1)!\,(2\lg q)^{2\mu+1}\,\sigma_{2(\mu-p)}}{\pi^{2(\mu-p)}\,[\pi^2+(2x\lg q)^2]^{p+1}};$$

daher

* Über diese Abschätzungen vgl. eine Arbeit Appells[32]), auf die Verfasser erst nachträglich aufmerksam gemacht worden ist. A. verfährt dort analog mit spezielleren Reihen.

$$\sum_0^\infty \varrho f^{(2\mu+1)}(\varrho+t) \frac{\cos}{\sin} 2(\varrho+1)u$$

$$< \frac{4\cdot(2\mu+1)!\,(2\lg q)^{2\mu+1}\sigma_{2(\mu-p)}}{\pi^{2(\mu-p)}} \left\{ \frac{\frac{\cos}{\sin} 2u}{\pi^2+(2\,t\lg q)^2]^{p+1}} + \frac{\frac{\cos}{\sin} 4u}{[\pi^2+(2(1+t)\lg q)^2]^{p+1}} + \cdots \right\}$$

$$< \frac{4\cdot(2\mu+1)!\,(2\lg q)^{2\mu+1}\sigma_{2(\mu-p)}}{\pi^{2(\mu-p)}} \left\{ \frac{1}{[\pi^2]^{p+1}} + \frac{1}{[\pi^2+(2\lg q)^2]^{p+1}} + \cdots \right\}.$$

Es sei $2(\varphi-1)|\lg q| < \pi < 2\varphi|\lg q|$; dann erhält man durch Zusammenfassen von je φ Gliedern

$$\sum_0^\infty \varrho f^{(2\mu+1)}(\varrho+t) \frac{\cos}{\sin} 2(\varrho+1)u < \frac{4\cdot(2\mu+1)!\,(2\lg q)^{2\mu+1}\sigma_{2(\mu-p)}\,\varphi\, s_{(p+1)}}{\pi^{2\mu+2}},$$

so daß der Rest die Form erhält:

$$\frac{i}{2}P'_{2\mu} < \frac{c''b''_{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}\cdot\frac{4\cdot(2\mu+1)!\,(2\lg q)^{2\mu+1}\sigma_{2(\mu-p)}\,\varphi\, s_{p+1}}{\pi^{2\mu+2}}\cdot \sin u_r(\sin u_r+\cos u_r),$$

und da für $0 < r < \frac{n}{4}$

$$\frac{1}{r^{2\mu+2}} + \sum\left(\frac{1}{(\ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{1}{(\ln-r)^{2\mu+2}}\right) \text{ annähernd } = \frac{\sigma_{2\mu+2}}{r^{2\mu+2}} \text{ ist,}$$

$$\frac{i}{2}P'_{2\mu} < \frac{2n^{2\mu+2}\cdot 4\cdot(2\mu+1)!\,\varphi\,\sigma_{2(\mu-p)}s_{p+1}}{(r\pi)^{2\mu+2}\,2^{2\mu+2}\,\pi(\varphi-1)^{2\mu+1}} \sin u_r(\sin u_r+\cos u_r)\cdot\sigma_{2\mu+2},$$

der am kleinsten wird für $2\mu+1=\left[\frac{2r\pi(\varphi-1)}{n}\right]$.

Beispiel: $r=3$, $n=16$, $\log q=-\frac{1}{10}$, $\varphi=16$, $\mu=9$; $b'_2=-1{,}619914$, $b'_4=14{,}124818$, $b'_6=-305{,}47293$, $b'_8=12326{,}71$, $b'_{10}=-799261$, $b'_{12}=76016100$, $b'_{14}=-9968140000$,

$$am\tfrac{3}{8}K = \tfrac{3}{16}\pi + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{3}{16}\pi\{1+0{,}0080996+0{,}0002943+0{,}0000259$$
$$+0{,}0000042+0{,}0000011+0{,}0000004$$
$$+0{,}0000002\}+\varrho\cdot 0{,}000005$$
$$=0{,}589049+\tfrac{1}{2}\cdot 1{,}509216+\varrho\cdot 0{,}000005 = 1{,}343657+\varrho\cdot 0{,}000005$$
$$<1{,}343662$$
$$>1{,}343652.$$

Will man eine noch größere Genauigkeit erzielen, so kann man dies durch Absonderung einer Anzahl von Gliedern bewerkstelligen; dann treten statt der Eulerschen Zahlen E_{2k} die U.-E. Z. ε_k auf, und man kann dann die Genauigkeit auf jeden beliebigen Grad treiben.

2) $\frac{n}{4} < r < \frac{n}{2}$:

$$\frac{iP'_{2\mu}}{2} = \frac{\sin u_r}{(2\mu+1)!}\Big\{-c''b''_{2\mu+1}\sin u_r \sum_0^\infty {}_\varrho f^{(2\mu+1)}(\varrho+t'')\sin 2(\varrho+1)u_r$$

$$+ c''b''_{2\mu+1}\cos u_r \sum_0^\infty {}_\varrho f^{(2\mu+1)}(\varrho)\cos 2(\varrho+1)u_r$$

$$-\frac{ic'b'_{2\mu+2}}{2\mu+2}\sum_0^\infty {}_\varrho f^{(2\mu+2)}(\varrho+t')\cos 2(\varrho+1)u_r \sin u_r\Big\}$$

$$< \frac{\sin u_r}{(2\mu+1)!}\Big\{|c''b''_{2\mu+1}|\sin u_r \frac{4\cdot(2\mu+1)!\,(2|\lg q|)^{2\mu+1}\cdot\varphi\cdot\sigma_{2(\mu-p)}s_{p+1}}{\pi^{2\mu+2}}$$

$$+|c''b''_{2\mu+1}|\cos u_r \frac{4\cdot(2\mu+1)!\,(2|\lg q|)^{2\mu+1}\,\varphi\,\sigma_{2(\mu-p)}s_{p+1}}{\pi^{2\mu+2}}$$

$$+\frac{|ic'b'_{2\mu+2}|}{2\mu+2}\sin u_r \frac{4\cdot(2\mu+2)!\,(2|\lg q|)^{2\mu+2}\,\varphi\cdot\sigma_{2(\mu-p)}s_{p+2}}{\pi^{2\mu+3}}\Big\}.$$

Man setze für die hier auftretenden U.-B. Z. die Potenzreihen; bedenkt man, daß, da $\frac{n}{4} < r < \frac{n}{2}$ ist, $\frac{1}{r^k} + \sum\left(\frac{1}{(ln+r)^k} + \frac{1}{(ln-r)^k}\right) < \frac{2\sigma_k}{r^k}$ ist, so ergibt sich die neue Ungleichung:

$$\frac{iP'_{2\mu}}{2} < \frac{4\sin u_r}{(2\mu+1)!}\Big\{\frac{(2\mu+1)!\,n^{2\mu+2}\cdot 4\,(2\mu+1)!\,\varphi}{(2r\pi)^{2\mu+2}(\varphi-1)^{2\mu+1}\pi}\sin u_r + \frac{(2\mu+1)!\,n^{2\mu+2}\cdot 4\,(2\mu+1)!\,\varphi}{(2r\pi)^{2\mu+2}(\varphi-1)^{2\mu+1}\pi}\cos u_r$$

$$+\frac{(2\mu+2)!\,n^{2\mu+3}\,4\cdot(2\mu+2)!\,\varphi\sin u_r}{(2\mu+2)\,(2r\pi)^{2\mu+3}(\varphi-1)^{2\mu+2}\pi}\Big\}$$

$$< \frac{16\sin u_r\cdot\varphi\cdot n^{2\mu+2}(2\mu+1)!}{\pi(2r\pi)^{2\mu+2}(\varphi-1)^{2\mu+1}}\Big\{\sin u_r + \cos u_r + \frac{(\mu+1)n}{(\varphi-1)r\pi}\sin u_r\Big\}$$

$$< \frac{16\varphi n}{2r\pi^2}\cdot(2\mu+1)!\left(\frac{n}{2r\pi(\varphi-1)}\right)^{2\mu+1}\sin u_r\Big\{\sin u_r + \cos u_r + \frac{(\mu+1)n}{(\varphi-1)r\pi}\sin u_r\Big\}.$$

Aus der letzten Form erkennt man, daß der Rest am kleinsten wird für

$$2\mu+1 = \left[\frac{2r\pi(\varphi-1)}{n}\right].$$

In diesem Falle ist annähernd $\frac{(\mu+1)n}{(\varphi-1)r\pi} = 1$, da ungefähr $\mu+1 = \left[\frac{r\pi(\varphi-1)}{n}\right]$ ist, und für den kleinsten Wert des Restes ergibt sich also

$$\frac{iP'_{2\mu}}{2} < \frac{16\varphi n^{2\mu+2}(2\mu+1)!}{\pi(2r\pi)^{2\mu+2}(\varphi-1)^{2\mu+1}}\{2\sin u_r + \cos u_r\}\sin u_r.$$

Beispiel: $\log q = -\frac{1}{10}$, $r=3$, $n=8$, $\varphi=16$, $\mu=17$,

$$\operatorname{am}\tfrac{3}{4}K = \tfrac{3}{8}\pi + \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{3}{8}\pi\{1 + 0{,}002929 + 0{,}000031 + 0{,}000001\} + \tfrac{i}{2}P'_{2\mu}$$

$$= 1{,}1780972 + 0{,}2077200 + \tfrac{i}{2}P'_{2\mu}$$

$$= 1{,}3858172.$$

Dabei ist

$b_2'(\frac{3}{8}\pi) = -0{,}5857864, \quad b_4' = +1{,}4730876, \quad b_6' = -8{,}3823244.$

Würde man bis zur äußersten Grenze der Genauigkeit gehen, so würde $\frac{i}{2}P_{34}' = 0{,}000000000002$, also das Resultat auf 11 Dezimalen richtig sein.

III. Als dritte Anwendung sei die Reihe gewählt:

$$\frac{K}{2\pi \sin \operatorname{coam} \frac{2Ku}{\pi}} = \frac{1}{4\cos u} + \frac{q\cos u}{1-q} - \frac{q^3\cos 3u}{1-q^3} + \frac{q^5\cos 5u}{1-q^5} - \cdots \quad \text{Jacobi}^{33)}$$

Sie kann folgendermaßen umgestaltet werden: $q = \frac{1}{p}$, $p > 1$,

$$\frac{K}{2\pi \sin \operatorname{coam} \frac{2Ku}{\pi}} = \frac{1}{4\cos u} + \frac{\cos u}{p-1} - \frac{\cos 3u}{p^3-1} + \frac{\cos 5u}{p^5-1} - \cdots + (-1)^{a-1}\frac{\cos(2a-1)u}{p^{2a-1}-1}$$

$$+ (-1)^a\left(\frac{1}{p^{2a+1}-1} - \frac{\cos 2u}{p^{2a+3}-1} + \frac{\cos 4u}{p^{2a+5}-1} - \cdots\right)\cos(2a+1)u$$

$$- (-1)^a\left(-\frac{\sin 2u}{p^{2a+3}-1} + \frac{\sin 4u}{p^{2a+5}-1} - \cdots\right)\sin(2a+1)u.$$

Es ist die erzeugende Funktion $f(y) = \frac{1}{p^{2y}-1}$, $\quad x = a + \frac{1}{2}$, $\quad h = 1$,

$f^{(k)}(a+\frac{1}{2}) = (2\lg p)^k c b_k((2a+1)\lg p)$; also

$$\frac{K}{2\pi \sin \operatorname{coam} \frac{2Ku}{\pi}} = \frac{1}{4\cos u} + \frac{\cos u}{p-1} - \frac{\cos 3u}{p^3-1} + \frac{\cos 5u}{p^5-1} - \cdots + (-1)^{a-1}\frac{\cos(2a-1)u}{p^{2a-1}-1}$$

$$+ (-1)^a \frac{c\gamma_1'}{2}\Big(1 + \frac{\delta_1' b_1}{1!}2\lg p + \frac{\delta_3' b_3}{3!}(2\lg p)^3 + \frac{\delta_5' b_5}{5!}(2\lg p)^5 + \cdots$$

$$+ \frac{\delta_{2\mu-1}' b_{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}(2\lg p)^{2\mu-1}\Big)\cos(2a+1)u + \frac{(-1)^a c\gamma_1''}{2}\Big(1 + \frac{\delta_2'' b_2}{2!}(2\lg p)^2$$

$$+ \frac{\delta_4'' b_4}{4!}(2\lg p)^4 + \cdots + \frac{\delta_{2\mu}'' b_{2\mu}}{(2\mu)!}(2\lg p)^{2\mu}\Big)\sin(2a+1)u$$

$$+ (-1)^a\left(\frac{P_{2\mu}''}{2}\cos(2a+1)u - \frac{iP_{2\mu}'}{2}\sin(2a+1)u\right).$$

Die Reste lassen sich auf folgende Weise abschätzen: es sei

$$\frac{m}{4} < k < \frac{m}{2}, \quad u = \frac{k}{m}\pi,$$

$$\frac{P_{2\mu}''}{2} = -\frac{\gamma_1'\delta_{2\mu+1}'}{(2\mu+1)!}\Big\{\cos u_k \sum_0^\infty{}_\varrho (-1)^{\varrho+1} f^{(2\mu+1)}(a+\tfrac{1}{2}+\varrho+t')\cos 2(\varrho+1)u_k$$

$$+ \sin u_k \sum_0^\infty{}_\varrho (-1)^{\varrho+1} f^{(2\mu+1)}(a+\tfrac{1}{2}+\varrho+t'')\sin 2(\varrho+1)u_k\Big\}.$$

Nach Anwendung III von Abschnitt A S. 50 findet man leicht:

$$f^{(2\mu+1)}(x) < 2\cdot(2\mu+1)!(2\lg p)^{2\mu+1}\left[\frac{1}{2(x\,2\lg p)^{2\mu+1}} + \frac{s_{2(\mu-r)}}{[(2\pi)^2+(2x\lg p)^2]^{r+1}(2\pi)^{2(n-r)}}\right],$$

$$(\varphi-1)\lg p < \pi < \varphi\lg p, \quad \lambda - 1 < \left(\frac{a+\frac{1}{2}}{\varphi}\right)^2 < \lambda,$$

$$\sum_0^\infty{}_\varrho (-1)^{\varrho+1} f^{(2\mu+1)}(a+\tfrac{1}{2}+\varrho+t') \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, 2(\varrho+1)u_k$$

$$< \frac{2\cdot(2\mu+1)!\,(2\lg p)^{2\mu+1}}{1}\left\{\frac{a\,s_{2\mu+2}}{2(\lg p)^{2\mu+2}(2a+1)^{2\mu+1}} + \frac{s_{2(\mu-r)}\,\varphi\,s_{r+1}}{(2\pi)^{2\mu+2}\lambda^r}\right\}$$

$$< \frac{(2\mu+1)!\,2^{2\mu+1}\varphi a}{\pi\,(2a+1)^{2\mu+1}}\left\{1+\frac{\varphi^{2\mu-2}(2a+1)^3}{a\,8(\varphi-1)^{2\mu+1}}\right\},$$

$$\frac{P''_{2\mu}}{2} < \frac{n^{2\mu+2}\cdot 2(2\mu+1)!\,a\varphi}{2\pi^{2\mu+3}(2a+1)^{2\mu+1}(m-2k)^{2\mu+2}}\left\{1+\left(\frac{\varphi}{\varphi-1}\right)^{2\mu+1}\frac{(2a+1)^3}{8a\varphi^3}\right\}(\cos u_k + \sin u_k),$$

da $\frac{m}{4} < k < \frac{m}{2}$ ist, und also

$$\sum_0^\infty{}_l\left(\frac{1}{[(2l+1)m-2k]^{2\mu+2}} + \frac{1}{[(2l+1)m+2k]^{2\mu+2}}\right) < \frac{\sigma_{2\mu+2}}{(m-2k)^{2\mu+2}} \text{ ist}$$

$$\tfrac{1}{2}P''_{2\mu} < \frac{n\cdot a\cdot\varphi}{\pi^2(m-2k)}\cdot(2\mu+1)!\left(\frac{n}{(2a+1)\pi(m-2k)}\right)^{2\mu+1}$$

$$\cdot\left\{1+\left(\frac{\varphi}{\varphi-1}\right)^{2\mu+1}\frac{(2a+1)^3}{8a\varphi^3}\right\}(\cos u_k + \sin u_k);$$

also ist $\frac{1}{2}P''_{2\mu}$ am kleinsten für $2\mu+1 = \left[\frac{(2a+1)(m-2k)(\varphi-1)}{n\varphi}\pi\right]$; dasselbe Resultat hätte sich für $\frac{i}{2}P'_{2\mu}$ ergeben.

Man erkennt, daß man auch in diesem Falle durch zweckmäßige Wahl von a, der Anzahl der abgesondert zu berechnenden Glieder, den Fehler unter jede Grenze herabdrücken kann.

Den Schluß der Betrachtungen mögen folgende Bemerkungen bilden:

Wirtinger hat, wie schon in der Einleitung erwähnt, gezeigt, daß die Eulersche Summenformel dazu dienen kann, Reihen so zu transformieren, daß ihnen auch außerhalb ihres Konvergenzbezirkes endliche und bestimmte Werte beigelegt werden können, wie er es an der ζ-Funktion durchführt. Ähnlich hier: die Reihe $f(u,s) = \sum_1^\infty{}_\varrho \frac{\cos 2\varrho u}{\varrho^s}$, die mit der ζ-Funktion verwandt ist, divergiert, sobald $s < 1$ ist; doch haben wir die Möglichkeit, sie nach der Entwickelung von S. 58 f. auch noch zu definieren

für Werte $s > -2\mu$, da für diesen Fall die Restintegrale noch konvergieren und die rechte Seite einen endlichen und eindeutigen Wert ergibt; durch Wahl von μ kann man dann $f(u, s)$ für jeden Punkt s definieren, ausgenommen $u = 0$, da in diesem Falle ic' unendlich groß wird. Doch sei das Prinzip der analytischen Fortsetzung hier nur angedeutet.

Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß die abgeleiteten Transformationsformeln sich von Bedeutung zeigen, sobald es gilt, Potenzreihen $\sum_0^\infty a_k z^k$ in bezug auf ihre Konvergenz auf dem Konvergenzkreise und außerhalb desselben zu untersuchen; setzt man nämlich $z = \varrho e^{i\varphi}$, so kann man die ursprüngliche Reihe in einen reellen Teil $\sum_0^\infty a_k \varrho^k \cos k\varphi$ und einen imaginären $i \sum_0^\infty a_k \varrho^k \sin k\varphi$ spalten, die man nun mit Hilfe der obigen Summationsformeln näher untersuchen kann. Doch auch hierauf soll nicht weiter eingegangen werden.

Literaturnachweis.

1) Schlömilch: Kompendium d. höher. Analys. II. S. 209 ff. (3. Aufl. 1879).
2) Wirtinger: Einige Anwendungen der Euler-Macl. Summenf. Acta Math. Bd. 26, S. 255 ff.
3) Franel: Sur la formule sommatoire d'Euler. Math. Annal. Bd. 47, S. 433 ff.
4) Kronecker: Über eine bei Anwendung der part. Integr. nützliche Formel. Sitzungsber. der Königl. Preuß. Akademie der Wissensch. zu Berlin. Jahrg. 1885. 2. Halbb. S. 141 ff.
5) Lindelöf: Quelques Applications d'une Form. Somm. Génerale. Acta Societat. Scientiar. Fennicae, Tome XXXI, Nr. 3 (1902).
6) Jacobi: De usu legitimo formulae summator. Maclaurinianae. Crellesches Journal, Bd. XII, S. 363 (1834).
7) Poisson: Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies. Mémoire de l'Acad. des sciences à Paris, Tome VI (1823), S. 571.
8) Saalschütz: Vorlesungen ü. d. B. Z. Berlin 1893, S. 167 ff.
9) Malmstén: Restbestimmungen der Maclaurinschen Summenf. Acta math. V.
10) Sonin: Sur les termes complémentaires de la form. somm. d'Euler etc. Annales de l'école normale 1889, III. série tome VI, S. 257 ff.
11) Stieltjes: Recherches sur quelques séries divergentes. Annales de l'éc. norm. 1886. III. sér. III. tome.
12) Bourguet: Thèses 1880.
13) Lambert: Architektonik, S. 507.
14) Curtze: Sur la série de Lambert etc. Annali di Math. pura ed appl. Ser. II. Tomo I, S. 285 ff.
15) Clausen: Beitrag zur Theorie der Reihen, Crelles Journal, 1828. Bd. III, S. 95.
16) Cesaro: a) Sur la série de Lamb. Nouv. ann. de M. 1881 III. ser. tome V. S. 106 ff.
b) Sur les transformations de la s. d. L. Nouv. ann. d. M. 1888. III. ser. tome VII, S. 374 ff.
17) A. Gutzmer: Remarques sur la théorie des séries. Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, vol. VIII, Port.
18) M. Lerch: Neuer Beweis einer Kirchhoffschen Formel. Schlömilchsche Zeitschrift XXXIV. S. 63—64. 1889.
19) M. Lerch: Nouvelle analogoe de la série théta et quelques séries hypergéométriques particulières de Heine. Académie des sciences, Prague 1893.
20) Schlömilch: Notiz ü. d. L.sche Reihe: Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1884. XXIX. Jahrg., S. 384.
21) Hansen: Note sur la somm. d. l. sér. d. L. Math. Annal. 1901. Bd. 54, S. 604 ff.
22) M. Lerch: Contributions à la théorie des fonctions elliptiques etc. Prag. Akad. Verh. I, S. 133—148. 1891.
23) Schlömilch: a) Komp. d. höh. Analys. II. S. 241 f. (3. Aufl. 1879).
b) Liouvillesch. Journ. II. sér. 8. tome 1863, S. 100 f.
c) Über e. Transf. unendl. R. Ber. ü. d. Verh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. 13. Bd. 1861, S. 120 ff.
24) Cesaro: Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. Ann. de math. 1886. III. ser. tome V, S. 305 ff.
25) Krause: Zur Theorie d. U.-B. Z. und U.-B. F., Ber. ü. d. Verh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. 54. Bd., 1902.
26) Krause: Zur Theorie der Maclaurinschen Summenf. Arch. d. Math. u. Phys. III. Reihe V., 3. u. 4. Heft, S. 179 ff.
27) M. Krause: Sur l'interpolation des fonctions continues par des polynomes. Comptes Rendus 1905.
28) M. Lerch: Sur un point de la théorie des fonct. génératrices d'Abel. Acta Math. XXVII S. 339—351. 1903.
29) Rogel: Theorie der Eulerschen Funktionen: Sitzungsber. d. Königl. Böhm. Ges. d. Wiss. Jahrg. 1893, XXIII.
30) Raabe: Bernoullische Funktionen, Crellesches Journal, 42.
31) Krause: Zur Theorie der Eulerschen und Bernoullischen Zahlen, § 4. Monatshefte f. Math. u. Phys. XIV. Jahrg., S. 305 ff.
32) Appell: Sur les valeurs approchées des polynomes de Bernoulli. Nouv. ann. 3, V.
33) Jacobi: Gesammelte Werke, S. 155 ff.

Ich, Karl Fritz Wicke, wurde geboren am 31. Mai 1881 zu Dresden. Nach Ablegung der Reifeprüfung am Wettiner Gymnasium meiner Vaterstadt wandte ich mich dem Studium der Reinen und Angewandten Mathematik und Physik zu, und zwar von Ostern 1900 bis Michaelis 1901 und von Michaelis 1902 bis Ostern 1904 an der Technischen Hochschule daselbst und arbeitete hier unter Leitung von Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. phil. M. Krause im Mathematischen Seminar. In der Zwischenzeit hielt ich mich an der Universität Leipzig von Michaelis 1901 bis Michaelis 1902 auf und beschloß mein Studium im Sommersemester 1904 an der Universität Jena. Nachdem ich im Juli 1904 zu Dresden die Prüfung für Kandidaten des Höheren Lehramtes bestanden hatte und für den Winter 1904/05 als Vikar an das Realgymnasium zu Zittau berufen worden war, bin ich seit Ostern 1905 in gleicher Eigenschaft an der II. Realschule zu Dresden tätig.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Erläuterungen zur nachstehenden Kurventafel.

$$:f(y) = \text{const} \times \sum (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m-2k} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\cos ry}{r} + \sum (-1)^l \left[\frac{\cos(ln+r)y}{ln+r} - \frac{\cos(ln-r)y}{ln-r} \right] \right\}$$

$$f(y)^* = \text{const} \times \sum \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m+2k} + \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\sin ry}{r} + \sum \left[\frac{\sin(ln+r)y}{ln+r} + \frac{\sin(ln-r)y}{ln-r} \right] \right\}$$

$$A_2A_2: f(y) = \text{const} \times \sum (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^2} + \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^2} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\sin ry}{r^2} + \sum (-1)^l \left[\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2} \right] \right\}$$

$$f(y)^* = \text{const} \times \sum \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^2} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^2} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\cos ry}{r^2} + \sum \left[\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^2} \right] \right\}$$

$$A_3A_3: f(y) = \text{const} \times \sum (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^3} + \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^3} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\cos ry}{r^3} + \sum (-1)^l \left[\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^3} - \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^3} \right] \right\} \qquad 0 \leqq y \leqq \pi$$

$$f(y)^* = \text{const} \times \sum \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^3} + \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^3} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\sin ry}{r^3} + \sum \left[\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^3} + \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^3} \right] \right\} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$$

$$B_1B_1: f(y) = \text{const} \times \sum \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m-2k} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\cos ry}{r} + \sum \left[\frac{\cos(ln+r)y}{ln+r} - \frac{\cos(ln-r)y}{ln-r} \right] \right\}$$

$$f(y)^* = \text{const} \times \sum (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{(2l+1)m-2k} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{(2l+1)m+2k} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\sin ry}{r} + \sum (-1)^l \left[\frac{\sin(ln+r)y}{ln+r} + \frac{\sin(ln-r)y}{ln-r} \right] \right\}$$

$$B_2B_2: f(y) = \text{const} \times \sum \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^2} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^2} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\sin ry}{r^2} + \sum \left[\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2} \right] \right\}$$

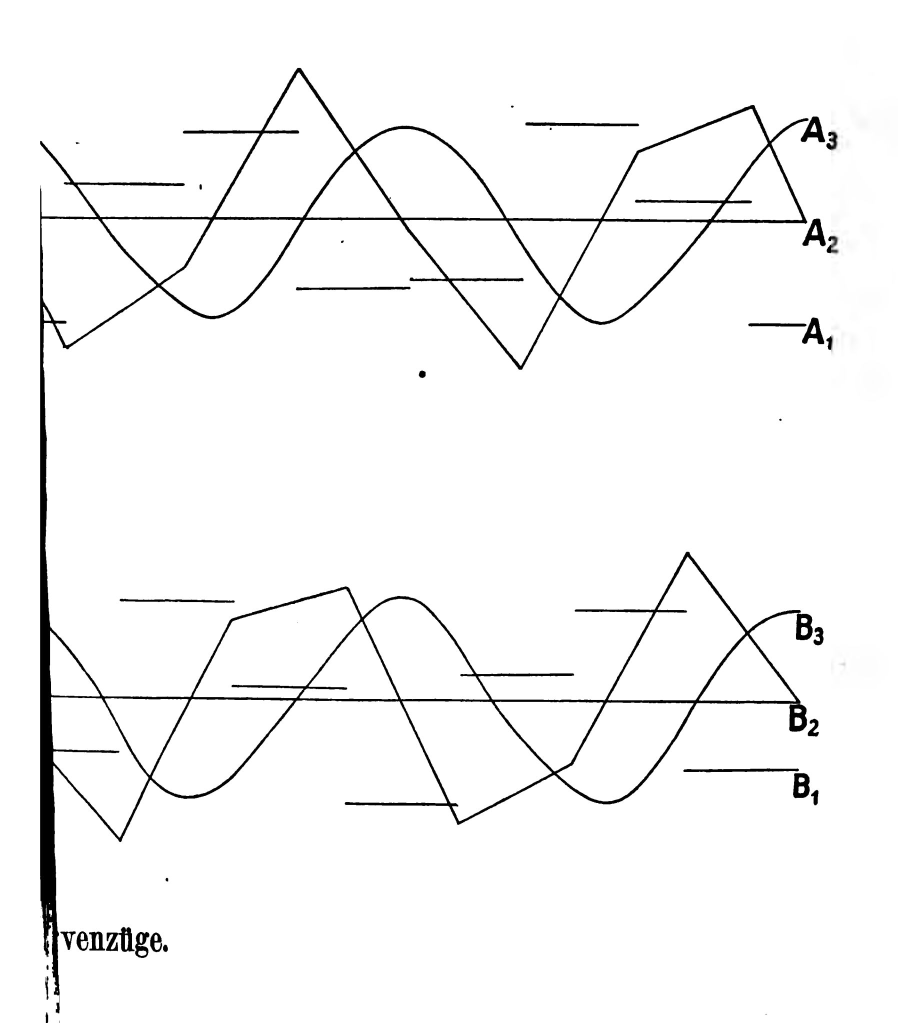
$$f(y)^* = \text{const} \times \sum (-1)^l \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^2} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^2} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\cos ry}{r^2} + \sum (-1)^l \left[\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^2} \right] \right\}$$

$$B_3B_3: f(y) = \text{const} \times \sum \left\{ \frac{\cos[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^3} - \frac{\cos[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^3} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\cos ry}{r^3} + \sum \left[\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^3} - \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^3} \right] \right\} \qquad 0 \leqq y \leqq \pi$$

$$f(y)^* = \text{const} \times \sum (-1)^l \left\{ \frac{\sin[(2l+1)m-2k]y}{[(2l+1)m-2k]^3} - \frac{\sin[(2l+1)m+2k]y}{[(2l+1)m+2k]^3} \right\} = \text{const} \times \left\{ \frac{\sin ry}{r^3} + \sum (-1)^l \left[\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^3} + \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^3} \right] \right\} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq +\frac{\pi}{2}$$

---

* Siehe S. 23 vorletzter Absatz.



venzüge.

Erläuterungen zur nachstehenden Kurventafel.


3 2044 030 610 810

